Interludio: Estudiemos qué ocurre si hacemos la derivada total del Lagrangiano.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \;\Rightarrow\; \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{1}$$

El segundo término dentro de la sumatoria se puede reescribir como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right)\dot{q}_i$$

Si ahora reemplazamos la ecuación anterior en (1) y reordenamos queda:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\sum_i \underbrace{\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right\}}_{=0} \dot{q}_i + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Reordenando términos obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left\{ \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} \right\} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\text{Si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo entonces } h \text{ se conserva}}$$

¿Quién es h? En la mayoría de los problemas que vamos a estudiar h será la **energía mecánica** E del sistema. Sin embargo, ésto no siempre es cierto. Por ejemplo, h podría conservarse pero no E (ver Ejercicio 17 de la Guía 0).

En general, $h = E$ cuando:

- ✓ La energía cinética es una **función homogénea de grado 2 en las velocidades**:

$$T(q_i, \lambda\dot{q}_i, t) = \lambda^2 T(q_i, \dot{q}_i, t)$$

- ✓ El potencial **no depende de las velocidades**: $U = U(q_i, t)$

Demostración: Por el *teorema de Euler de las funciones homogéneas*[a] vale que:

$$\boxed{T(\mathbf{q}, \lambda\dot{\mathbf{q}}, t) = \lambda^2 T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \;\Rightarrow\; \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} = 2T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}$$

$$\Rightarrow\; h \equiv \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \underbrace{\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}}_{=0}\dot{q}_i \right) - \mathcal{L} = 2T - (T - U)$$

$$\Rightarrow\; \boxed{h = T + U = E}$$

[a] Ustedes pueden probarlo calculando la derivada total respecto de λ en la igualdad $T(q, \lambda\dot{q}, t) = \lambda^2 T(q, \dot{q}, t)$ y luego evaluando en $\lambda = 1$. Van a llegar a que $\dot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 2T$.