Mecánica Clásica - Guía 2: Principios Variacionales y Simetrías

Federico Petrovich

6 de Septiembre de 2021

Problema 11

Antes de comenzar con el problema, recordar que si se realiza un cambio de coordenadas y de tiempo

$$q_j \to q_j' = q_j + \epsilon K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \ t \to t' = t + \epsilon\Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{1}$$

tal que

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') + \epsilon \frac{d}{dt'} F(\mathbf{q}', t') + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right), \tag{2}$$

entonces la cantidad

$$C = \sum_j p_j K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - h\Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + F(\mathbf{q}, t) \tag{3}$$

es constante. En particular, si el lagrangiano permanece invariante ante el cambio

$$q_j \to q_j + \epsilon K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \tag{4}$$

entonces la cantidad

$$C = \sum_j p_j K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{5}$$

es constante. Habiendo dicho esto, se va a comenzar con el problema.

En primer lugar, vale la pena aclarar que en todos los incisos se conserva la energía ya que el lagrangiano no depende del tiempo. Dicho esto, se van a hacer los ítems c y d.

c) En este problema, el lagrangiano en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + V(\rho). \tag{6}$$

Por un lado, como es invariante ante el cambio $z \to z + \epsilon$, (o dicho de otra forma no depende de z), se conserva

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{7}$$

que es la componente z del momento lineal.

Por el otro, como es invariante ante el cambio $\varphi \to \varphi + \epsilon$, (o dicho de otra forma no depende de θ), se conserva

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \tag{8}$$

que es la componente z del momento angular.

Se puede ver que el lagrangiano no es invariante ante el cambio $\rho \to \rho + \epsilon$ ya que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \neq 0$.

d) Un helicoide está dado por la ecuación

$$\rho = R, \ z = z_0 + \frac{H}{2\pi}\varphi, \tag{9}$$

donde R y z_0 son constantes. El lagrangiano está dado entonces por

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + V(\rho, \varphi, z). \tag{10}$$

Se puede ver que no se conserva ningun momento conjugado p_j. Sin embargo, usando el Teorema de Noether, es posible encontrar una cantidad conservada si uno se mueve a lo largo del helicoide. Para ello, se considera la transformación

$$\varphi \to \varphi + \epsilon K_\varphi, \tag{11}$$

$$z \to z + \epsilon K_z, \tag{12}$$

con K_φ y K_z constantes.

Como la energía cinética no depende ni de φ ni de z y los $\delta\varphi$ y δz son constantes, ésta resulta invariante ante esta tranformación. Luego, para que el Lagrangiano sea invariante, basta con pedir que el potencial no cambie. Para ello, la transformación debe ser tal que las nuevas variables estén dentro del helicoide, para lo cual hay que pedir

$$\delta z = \frac{H}{2\pi}\delta\varphi. \tag{13}$$

Esto implica

$$K_z = \frac{H}{2\pi}K_\varphi \tag{14}$$

y por ende la cantidad conservada resulta ser

$$C = p_\varphi K_\varphi + p_z K_z = \left(p_\varphi + p_z\frac{H}{2\pi}\right)K_\varphi, \tag{15}$$

o bien,

$$\tilde{C} = p_\varphi + p_z\frac{H}{2\pi} = l_z + p_z\frac{H}{2\pi}. \tag{16}$$