Guía 0: Mecánica Newtoniana

Mecánica Clásica
2^{do} Cuatrimestre de 2021
Sebastián E. Nuza

Ejercicio 1

En este ejercicio se pide analizar el movimiento de una partícula sometida a una fuerza

$$\mathbf{F}(x) = \left(-kx + \frac{a}{x^3}\right)\hat{\mathbf{x}},$$

en donde $a, k > 0$. Más adelante, en la Guía 4, veremos que existe motivación física para una fuerza *efectiva* de este tipo cuando estudiemos fuerzas centrales y escribamos el *potencial efectivo* de un oscilador armónico isótropo. Por ahora, simplemente, analicemos qué podemos decir sobre el movimiento de la partícula en todo el dominio de la coordenada x. Para fijar ideas, podemos pensar que estamos en presencia de un oscilador armónico unidimensional perturbado por el término ax^{-3}.

En el primer inciso nos piden, entre otras cosas, hallar el potencial $U(x)$ y discutir los tipos de movimiento posibles. Sabemos que hallar el potencial de una fuerza implica encontrar una función escalar U tal que $\mathbf{F}(x) = -\nabla U$. Es fácil ver que el siguiente potencial cumple con lo pedido

$$U(x) = \frac{a}{2x^2} + \frac{kx^2}{2} + C,$$

en donde C es una constante de integración la cual, sin pérdida de generalidad, se puede elegir igual a cero. En consecuencia, podemos decir que el campo de fuerza en cuestión es *conservativo* y que la energía mecánica de la partícula permanecerá constante. El potencial que estamos analizando tiene la siguiente forma:

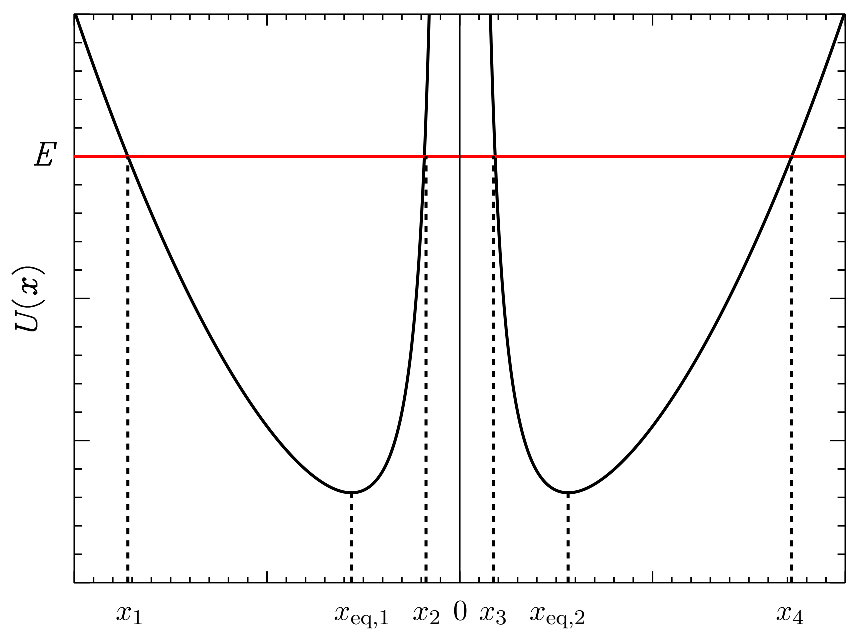

Figura 1: La partícula se mueve entre $x_1 \le x \le x_2$ o $x_3 \le x \le x_4$.

Este potencial tiene dos puntos de equilibrio estable que corresponden a los valores de x en donde se anula la fuerza, es decir, aquellas posiciones tal que

$$F(x_{\text{eq},1,2}) = -\left.\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right|_{x_{\text{eq},1,2}} = -U'(x_{\text{eq},1,2}) = 0 \Leftrightarrow x_{\text{eq},1,2} = \pm\left(\frac{a}{k}\right)^{1/4}.$$

Del gráfico se ve claramente que los equilibrios son estables por ser mínimos del potencial, lo cual se puede verificar fácilmente evaluando la derivada de la fuerza en los puntos de equilibrio, es decir $F'(x_{\text{eq},1,2}) < 0$ o, lo que es lo mismo, $U''(x_{\text{eq},1,2}) > 0$.

La energía total de la partícula se puede escribir como

$$E = T(x) + U(x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 + \frac{a}{2x^2}, \tag{1}$$

en donde $T(x)$ es su energía cinética. Sabemos que los puntos de retorno se obtienen cuando se anula la energía cinética. Si planteamos esa condición en la ecuación anterior se obtienen 4 puntos de retorno:

$$x_i = \pm\sqrt{\tfrac{E}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 - \tfrac{ka}{E^2}}\right)} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nota importante: Para una dada energía E, *no todas las posiciones son físicamente aceptables.* Si $E = T(x_0) + U(x_0) < U(x_0) \Rightarrow T(x_0) < 0$, lo cual es imposible porque la energía cinética es cuadrática en la velocidad. En ese caso, x_0 será una posición inaccesible.

• Esto nos permite definir dos regiones disconexas (ver Figura 1) en donde la partícula podrá moverse y permanecerá ligada. De qué lado del eje y estará la partícula dependerá de cuál sea su posición inicial. Para este potencial no existen órbitas no ligadas ya que para cualquier nivel de energía siempre hay dos puntos de retorno.

• Para encontrar la ecuación horaria $x(t)$ hay que despejar[1] $\dot{x}$ de la ecuación (1) e integrar la ecuación diferencial resultante. Eso les queda de tarea ☺. Prueben con el cambio de variables $u = x^2$. Igualmente, volveremos a ver este tipo de integrales cuando estudiemos fuerzas centrales en la Guía 4. Les doy el resultado para las condiciones iniciales $\dot{x}(t_0) = 0$ y $x(t_0) = x_1$ (o $x(t_0) = x_4$):

$$\boxed{x^2(t) = \frac{E}{k}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{ka}{E^2}}\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,(t - t_0)\right)\right\}} \tag{2}$$

De esta ecuación se puede ver que el movimiento será periódico y de frecuencia $w = 2\sqrt{k/m}$. El período se obtiene de la relación $\tau = 2\pi/w = \pi\sqrt{m/k}$.

[1] $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{k}{2}x^2 - \frac{a}{2}x^{-2}\right)}$

• También nos piden interpretar lo que ocurre en los límites: $i)$ $E^2 \gg ka$ y $ii)$ $E^2 \to ka$. Veamos qué se obtiene en cada caso:

$i)$ $E^2 \gg ka \Leftrightarrow \frac{ka}{E^2} \ll 1$:

En primer lugar notemos que $U(x_{\mathrm{eq},1,2}) = \sqrt{ka}$. Esto equivale a la condición $E \gg U(x_{\mathrm{eq},1,2})$, es decir que la energía de la partícula será mucho mayor que el mínimo del potencial. Los 4 puntos de retorno resultantes son

$$x_1 = -\sqrt{\tfrac{2E}{k}}, x_2 = x_3 = 0, x_4 = +\sqrt{\tfrac{2E}{k}}.$$

Resolviendo la ecuación horaria (2) se obtiene

$$\boxed{x(t) = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}\left|\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,(t - t_0)\right)\right|}$$

Observando la Figura 2 podemos concluir que, cuando la partícula llega a $x = 0$, rebota sin variar el módulo de su velocidad. Esto se debe a que en ese punto se forma una barrera de potencial infinita. Notar que, debido al módulo que aparece en $x(t)$, la frecuencia en este caso es también $w = 2\sqrt{k/m}$, en lugar de $\sqrt{k/m}$, que es lo que sugeriría el argumento del coseno a primera vista.

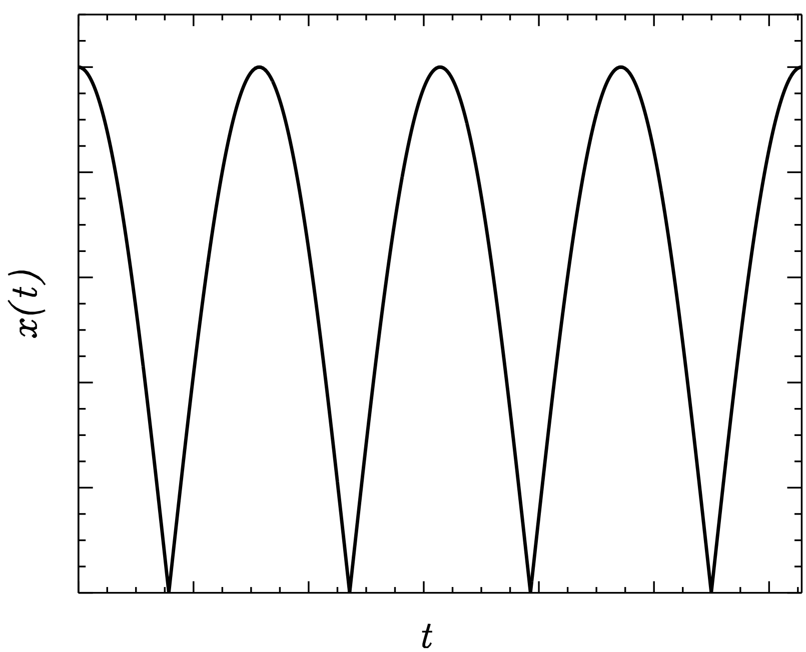

Figura 2: Evolución temporal de la posición de la partícula en el límite $E \gg U(x_{\mathrm{eq},1,2}) = \sqrt{ka}$.

ii) $E^2 \to ka \Leftrightarrow E \to \sqrt{ka}$:

En este caso, la energía de la partícula se acerca al valor mínimo del potencial. Efectivamente, si tomamos este límite en la ecuación (2) se obtiene

$$x(t) \to \pm\sqrt{\frac{E}{k}} = \pm\left(\frac{a}{k}\right)^{1/4} = x_{\text{eq},1,2}.$$

Por otro lado, sabemos que si nos acercamos lo suficiente a un punto de equilibrio estable, el potencial podrá aproximarse mediante una parábola; es decir, que se comportará como un oscilador armónico libre de perturbaciones.

¿Cuánto vale la frecuencia de las oscilaciones? Para responder a esta pregunta escribimos la ecuación de movimiento:

$$F(x) = m\ddot{x} = -kx + \frac{a}{x^3} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x - \frac{a}{mx^3} = 0} \tag{3}$$

Dado que el movimiento de la partícula va a ser alrededor del equilibrio podemos escribir

$$x = x_{\text{eq},1,2} + \delta x \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{\delta x},$$

en donde δx es el apartamiento respecto de los mínimos del potencial. Si definimos la cantidad $\epsilon \equiv \frac{\delta x}{x_{\text{eq},1,2}}$, entonces $x = x_{\text{eq},1,2}\,(1+\epsilon)$. Sustituyendo en la ecuación de movimiento (3) se obtiene

$$\ddot{\delta x} + \frac{k}{m}x_{\text{eq},1,2}\,(1+\epsilon) - \frac{a}{m}x_{\text{eq},1,2}^{-3}\,(1+\epsilon)^{-3} = 0.$$

Como $\epsilon \ll 1$ podemos aproximar $(1+\epsilon)^{-3} \approx 1 - 3\epsilon$ en el último término de la ecuación anterior. Les queda a ustedes sustituir y llegar a la ecuación del oscilador armónico:

$$\boxed{\ddot{\delta x} + \frac{4k}{m}\delta x = 0 \Leftrightarrow w^2 = \frac{4k}{m}}$$

La frecuencia en este caso será también $w = 2\sqrt{k/m}$.

Ejercicio 14

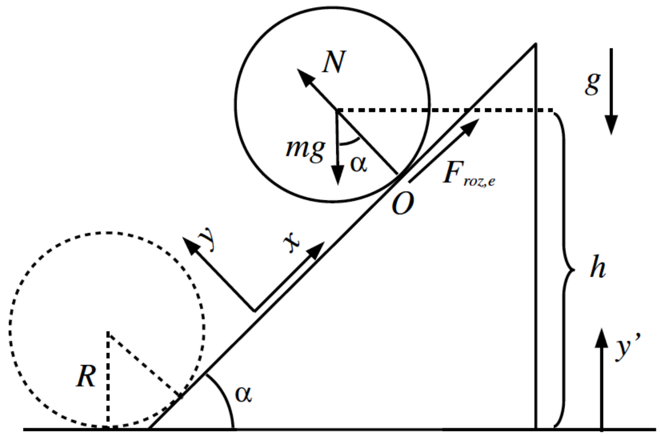

Figura 3

Este es el típico problema plano de cuerpo rígido (CR) que se ve en Física 1, en donde tenemos un disco que *rueda sin deslizar* sobre un plano inclinado. Las fuerzas aplicadas sobre el disco son la fuerza de vínculo normal al movimiento ($\mathbf{N}$), la fuerza de rozamiento *estático* ($\mathbf{F}_{\text{roz,e}}$) y el peso ($m\mathbf{g}$), tal como muestra la Figura 3. Recuerden que en un CR la resultante del peso de cada uno de los diferenciales de masa que lo conforman está aplicada en el centro de masa (CM). Analicemos primero qué magnitudes se conservan durante el descenso. Claramente, el CM del disco está acelerado, por lo que el **momento lineal** del mismo no se conservará:

$$\sum_i \mathbf{F}_{\text{ext},i} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{roz,e}} + m\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \neq 0.$$

El **momento angular** tampoco se conserva ya que la sumatoria de torques *externos* no es nula,

$$\sum_i \tau_{\text{ext},i} = \tau_{\text{N}} + \tau_{\text{F}_{\text{roz,e}}} + \tau_{mg} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \neq 0.$$

Sin embargo, la **energía mecánica** sí se conserva ya que, tanto la normal como la fuerza de rozamiento (que son fuerzas *no conservativas*), no realizan trabajo, es decir

$$\mathbf{N} \perp \mathbf{dl} \;\Rightarrow\; W_{\text{N}} = \int \mathbf{N} \cdot \mathbf{dl} = 0,$$

$$\mathbf{dl}_{\text{F}_{\text{roz,e}}} = 0 \;\Rightarrow\; W_{\text{F}_{\text{roz,e}}} = \int \mathbf{F}_{\text{roz,e}} \cdot \mathbf{dl}_{\text{F}_{\text{roz,e}}} = 0.$$

Recordemos que para resolver los problemas de CR había que plantear la ecuación de Newton para el centro de masa ($\mathbf{F}_{\text{ext}} = m\,\mathbf{a}_{\text{CM}}$), la ecuación de los torques externos respecto de un *punto fijo* o del CM ($\tau_{\text{ext}} = I\dot{\mathbf{\Omega}} \sim$ momento de inercia $\cdot$ aceleración angular) y las ecuaciones de vínculo correspondientes. En la Guía 5 volveremos a ver todo ésto más formalmente.

Desde el punto fijo O, en contacto con el plano inclinado, los torques de la normal y la fuerza de rozamiento son nulos, pero no el torque debido al peso, entonces

$$\sum_i \tau^O_{\text{ext},i} = R\hat{\mathbf{y}} \wedge mg\sin\alpha\,(-\hat{\mathbf{x}}) = mgR\sin\alpha\hat{\mathbf{z}} = I_O\dot{\mathbf{\Omega}}, \tag{4}$$

en donde la última igualdad corresponde a la ecuación de rotación del disco respecto de O e $I_O = I_{\rm CM} + mR^2$ (*teorema de Steiner* o de los ejes paralelos). Para un disco homogéneo $I_{\rm CM} = \frac{mR^2}{2}$. Por otro lado, la ecuación de movimiento del CM será

$$m\ddot{x}_{\rm CM} = F_{\rm roz,e} - mg\sin\alpha. \tag{5}$$

En total tenemos 3 incógnitas $(\ddot{x}_{\rm CM}, \dot{\Omega}, F_{\rm roz,e})$ y solo dos ecuaciones. Nos queda entonces plantear la ecuación de vínculo que relaciona la velocidad del CM con la velocidad angular del disco usando el hecho de que rueda sin deslizar, es decir

$$\mathbf{v}_{\rm CM} = \underbrace{\mathbf{v}_O}_{0} + \mathbf{\Omega} \wedge \underbrace{(\mathbf{r}_{\rm CM} - \mathbf{r}_O)}_{R\hat{\mathbf{y}}} \Rightarrow |\mathbf{a}_{\rm CM}| = |\dot{\mathbf{\Omega}}|R. \tag{6}$$

A partir de estas ecuaciones es posible calcular la aceleración del CM y la aceleración angular del disco. Les queda a ustedes terminar las cuentas. Los resultados son:

$$\boxed{\mathbf{a}_{\rm CM} = -\frac{2g\sin\alpha}{3}\,\hat{\mathbf{x}}}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{\Omega}} = \frac{2g\sin\alpha}{3R}\,\hat{\mathbf{z}}}$$

Nota: Como ejercicio les sugiero que repitan las cuentas tomando como centro de momentos el CM en lugar del punto O y que verifiquen que los resultados son equivalentes. ¿Cuánto vale el módulo de la fuerza de rozamiento?

• A continuación nos piden calcular cuánto valen la velocidad lineal y angular del disco al llegar al suelo asumiendo que la altura inicial del centro del disco es h. La condición para que el disco toque el piso será, entonces, que la altura del CM respecto de éste sea R (ver Figura 3). La solución puede encontrarse integrando la aceleraciones lineal y angular que calculamos más arriba. Sin embargo, aprovechando que **la energía se conserva**, lo resolveremos utilizando esa conservación. Para hacer la cuenta, lo que tenemos que recordar es como escribir la energía cinética de un CR. Si consideramos un punto O' del disco que puede estar fijo, o bien ser el CM, vale que

$$T_{\rm CR} = T_{\rm traslación} + T_{\rm rotación} = \frac{m}{2}|\mathbf{v}_{\rm O'}|^2 + \frac{I_{O'}}{2}\Omega^2.$$

Si no se acuerdan bien ésto no se preocupen, lo vamos a volver a ver en la Guía 5. La energía potencial gravitatoria es fácil de escribir. Si tomamos un eje de coordenadas $\hat{\mathbf{y}}'$ que apunte *hacia arriba*:

$$U_{\rm g}(y') = +mgy' \Rightarrow m\mathbf{g} = -\frac{dU_{\rm g}}{dy'}\,\hat{\mathbf{y}}' = -mg\,\hat{\mathbf{y}}'.$$

En lo que sigue elegimos el CM para hacer el cálculo (aunque también podríamos hacerlo desde O).

La energía mecánica escrita en los instantes inicial y final es entonces

$$E_{\text{inicial}} = \underbrace{T_{\text{disco, inicial}}}_{0} + U_{\text{g, inicial}} = mgh,$$

$$E_{\text{final}} = T_{\text{disco, final}} + U_{\text{g, final}} = \underbrace{\frac{m}{2}|\mathbf{v}_{\text{CM, suelo}}|^2}_{\frac{m}{2}(\Omega R)^2} + \frac{I_{\text{CM}}}{2}\Omega^2 + mgR.$$

De igualar estas dos expresiones, usando que $|\mathbf{v}_{\text{CM, suelo}}| = \Omega R$, se obtiene

$$\boxed{\mathbf{\Omega}_{\text{suelo}} = \sqrt{\frac{4g\,(h-R)}{3R^2}}\,\hat{\mathbf{z}}}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_{\text{CM, suelo}} = -\sqrt{\frac{4g\,(h-R)}{3}}\,\hat{\mathbf{x}}}$$

Nota: Fíjense que si $h = R$, el resultado es cero en ambos casos, tal como uno esperaría. Además, por construcción, ninguna de las dos velocidades depende del ángulo α de inclinación del plano inclinado, ¿a qué se debe ésto?

Ejercicio 17

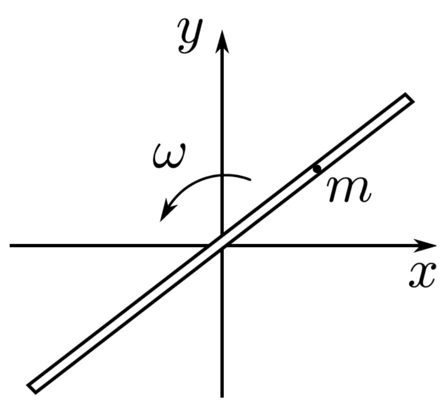

Figura 4

Este ejercicio es también uno de los problemas clásicos que vieron en Física 1. La bolita se mueve, sin fricción, dentro de un tubo que es forzado a girar con velocidad angular w constante en ausencia de gravedad. Primero nos piden analizar las conservaciones. La única fuerza de interacción que siente la bolita es la normal, cuya dirección es perpendicular al tubo en todo instante. Obviamente, el **impulso lineal** no se conserva ya que la normal (que es una fuerza *externa*) es distinta de cero, es decir

$$\sum_i \mathbf{F}_{\text{ext},i} = \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \neq 0.$$

El **momento angular** tampoco se conserva porque el torque *externo* entre entre la posición de la bolita y la normal no es nulo,

$$\sum_i \tau_{\text{ext},i} = \tau_{\text{N}} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{N} = Nr\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \neq 0.$$

De hecho, τ_{N} es el torque necesario para que la bolita, empujada por el tubo, gire. Por último, la **energía mecánica** no se conserva porque la normal, que es una fuerza *no conservativa*, hace trabajo. Usando coordenadas polares ésto lo podemos escribir como

$$W_{\text{N}} = \int \mathbf{N} \cdot \mathbf{dl} = \int N\hat{\theta} \cdot \left(dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\theta} \right) = \int Nrd\theta \neq 0.$$

La ecuación de movimiento de la bolita se puede escribir desde un **sistema inercial** usando, por ejemplo, coordenadas polares $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta})$. Para ello hay que recordar la expresión del vector aceleración, el cual posee una componente centrípeta y otra tangencial. Sin embargo, este problema también lo podemos plantear desde un **sistema rotante (no inercial)** fijo al tubo en donde los versores no dependan del tiempo. Llamaremos a estos versores $\hat{\mathbf{r}}'$ y $\hat{\theta}'$. Seguramente recordarán de Física 1 que en un sistema rotante aparecen fuerzas *ficticias* que, en realidad, son el resultado de efectos inerciales asociados a la rotación. Para encontrar la forma explícita de estas fuerzas de inercia es necesario escribir la relación entre la derivada temporal de un vector visto desde un sistema de referencia S fijo al espacio y otro rotante S' (*teorema de la derivada relativa*). En particular, la derivada del vector posición entre los dos sistemas se puede escribir como

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{\text{inercial}} = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{\text{rotante}} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r},$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r}. \tag{7}$$

Nota: Recordar que las velocidades desde los sistemas S y S' son $\mathbf{v} = \sum_i \dot{x}_i\,\hat{\mathbf{e}}_i$ y $\mathbf{v}' = \sum_i \dot{x}'_i\,\hat{\mathbf{e}}'_i$.

Si derivamos la expresión (7) respecto del tiempo y multiplicamos por la masa de la bolita podemos obtener la *fuerza* observada desde el sistema no inercial S', a saber

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \underbrace{2m\mathbf{v}' \wedge \mathbf{\Omega}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{m(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \wedge \mathbf{\Omega}}_{\text{centrífuga}} + \underbrace{m\mathbf{r}' \wedge \dot{\mathbf{\Omega}}}_{\text{Euler}},$$

en donde $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ corresponde a las fuerzas reales de interacción y los siguientes tres términos a las *fuerzas* de Coriolis, centrífuga y de Euler, respectivamente. Dado que la velocidad angular de la barra es constante ($\mathbf{\Omega} = w\,\hat{\mathbf{z}}$), la *fuerza* de Euler no contribuirá ($\dot{\mathbf{\Omega}} = 0$), a diferencia de las *fuerzas* de Coriolis y centrífuga que pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{Coriolis}} &= -2mw\dot{r}'\,\hat{\theta}' \\ \mathbf{F}_{\text{centrífuga}} &= +mw^2 r'\,\hat{\mathbf{r}}', \end{aligned}$$

en donde r' es la distancia de la bolita al origen. A partir de ésto, y usando que $\mathbf{N} = N\hat{\theta}'$, las ecuaciones dinámicas desde el sistema fijo a la barra quedan:

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{r}}')\ m\ddot{r}' = mw^2 r' \Leftrightarrow \boxed{\ddot{r}' - w^2 r' = 0} \\
&\hat{\theta}')\ N = 2mw\dot{r}'
\end{aligned}$$

La ecuación diferencial en el recuadro corresponde a lo que intuitivamente podríamos llamar ecuación del *anti-oscilador*, en contraposición con la ecuación homogénea de un oscilador armónico simple ($\ddot{r}' + w^2 r' = 0$), ya que sus soluciones divergen con el tiempo. La solución más general puede escribirse como

$$r'(t) = A\sinh(wt) + B\cosh(wt).$$

Sabiendo que $r'(0) = a$ y $\dot{r}'(0) = 0$, es posible determinar el valor de las constantes A y B. Por otro lado, la segunda ecuación nos permite calcular la normal como función del tiempo a partir de la ecuación horaria $r'(t)$. La misma será tal que cancele la *fuerza* de Coriolis en cada tiempo. Haciendo las cuentas finalmente queda:

$$\boxed{\mathbf{r}'(t) = a\cosh(wt)\,\hat{\mathbf{r}}'}$$

$$\boxed{\mathbf{N}(t) = 2maw^2\sinh(wt)\,\hat{\theta}'}$$

Estas dos soluciones divergen con el tiempo. Desde el punto de vista de un observador parado en el sistema rotante S', ésto se debe a que la *fuerza* centrífuga, la cual aumenta con la distancia al origen, "empuja" a la bolita hacia afuera. Desde el sistema S, sin embargo, este comportamiento se debe en realidad al término de aceleración centrípeta (un efecto puramente inercial) que puede interpretarse como una *fuerza* centrífuga al ser escrito del lado opuesto de la ecuación de movimiento.

• Otra de las cosas que pedía el ejercicio era calcular las ecuaciones de movimiento en cartesianas. Eso lo pueden hacer ustedes proyectando los versores $\hat{\mathbf{r}}'$ y $\hat{\theta}'$ (que vistos desde el sistema S no son más que los versores polares usuales) en la base $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ fija al espacio.