Mecánica Clásica - 2c 2021
23/08/2021
Máximo Coppola

Guía 1a - Principio de trabajos virtuales

Repaso Teórico

- **Vínculo holónomo:** se puede escribir como $G_r(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N, t) = 0, \;\; 1 \leq r \leq m$

  Por ejemplo si hacemos girar una partícula atada a una soga, el vínculo es $r - L = 0$.

- **Coordenadas generalizadas:** sea un sistema de N partículas descrito mediante coordenadas $\{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N\}$. Si existen m vínculos holónomos que las vinculan, no todas son independientes. Podemos describir la dinámica utilizando un conjunto de $n = 3N - m$ *coordenadas generalizadas* independientes $\{q_1, ..., q_{3N-m}\}$, a partir de las cuáles reescribimos las viejas coordenadas $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}(q_1, ..., q_{3N-m})$.

- **Fuerza de vínculo $\boldsymbol{R}_i$:** mantiene la ligadura. Depende del resto de las fuerzas.

- **Desplazamiento virtual $\delta\boldsymbol{x}_i$:** es a tiempo fijo o instantáneo, $\delta t = 0$, compatible con los vínculos.

- **Principio de trabajos virtuales:** las fuerzas de vínculo no hacen trabajo virtual.

Principio de Trabajos Virtuales

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta\boldsymbol{x}_i^V = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i\,\ddot{\boldsymbol{x}}_i) \cdot \delta\boldsymbol{x}_i^V = 0 \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{F}_i$ son las 'Fuerzas Aplicadas'. Podemos reescribir esta ecuación en función de las coordenadas generalizadas q usando regla de la cadena

$$\delta\boldsymbol{x}_i(q,t) = \sum_{k=1}^{3N-m} \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k + \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial t}\,\delta t \quad \Rightarrow \quad \delta\boldsymbol{x}_i^V(q,t) = \sum_{k=1}^{3N-m} \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k \tag{2}$$

Recordemos que por definición $\delta t = 0$ para un desplazamiento virtual porque son instantáneos. Utilizando algunas identidades vistas en la teórica y explotando el hecho de que los desplazamientos δq_k son independientes se llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_k} \tag{3}$$

donde T es la energía cinética y Q_k las *fuerzas generalizadas*.

Ejercicio 1

Tenemos dos partículas de igual masa sometidas cada una a la acción de dos resortes, de constantes elásticas k y k'. En principio cada masa podría moverse en las tres direcciones espaciales. Tenemos $N = 2$ partículas y $3N = 6$ grados de libertad en total, 3 por cada partícula; $\boldsymbol{x}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ y $\boldsymbol{x}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$.

Asumamos que las partículas sólo se mueven unidimensionalmente en $\hat{X}$. Matemáticamente, esta asunción implica poner 4 vínculos holónomos (dos por partícula)

$$Y_1 = d, \quad Z_1 = 0, \quad Y_2 = d, \quad Z_2 = 0 \tag{4}$$

No hay más vínculos. En este caso, los vínculos reducen el número de grados de libertad independientes a $3N - m = 6 - 4 = 2$. Vamos a necesitar entonces 2 coordenadas generalizadas para describir la dinámica del sistema. En principio, es válido elegir a $\{x_1, x_2\}$ como esas coordenadas, siendo estas el apartamiento del equilibrio de cada masa.

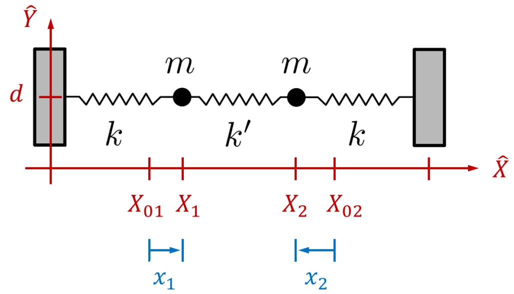

Figura 1: X_1 y X_2 son las posiciones de las partículas; X_{01} y X_{02} sus posiciones de equilibrio; x_1 y x_2 su diferencia.

a) Nos preguntan: *sean $q_1 = x_1 + x_2$ y $q_2 = x_1 - x_2$, ¿definen q_1 y q_2 un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?*. Estas coordenadas son compatibles con los vínculos (4) y representan dos grados de libertad, por lo que la respuesta es **sí**. De hecho. el par original $\{x_1, x_2\}$ también constituían coordenadas generalizadas. Es más: cualquier par que sea una combinación linealmente independiente de x_1 y x_2 también será un conjunto de coordenadas generalizadas. Por ejemplo, otro conjunto es el par $\{X_1, X_2\}$ de las posiciones de las masas respecto del origen de la figura 1.

¿Qué *no* sería un conjunto admisible? Algo que involucre a Y ó Z. Por ejemplo $q_3 = Y_1 + Y_2$ y $q_4 = Y_1 - Y_2$ no son coordenadas generalizadas; los vínculos nos dicen que éstas no son variables sino constantes, $q_3 = 2d$ y $q_4 = 0$.

b) Nos piden describir cualitativamente el movimiento para los casos en que $q_1 = 0$ o $q_2 = 0$. Está claro que el sistema oscilará, pero veamos de qué forma.

- Si $q_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$. Las oscilaciones de las masas son iguales en amplitud pero opuestas en sentido; se dice que oscilan en *contrafase*.
- Si $q_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. Las oscilaciones de las masas son iguales en amplitud y en sentido; se dice que oscilan en *fase*.

Esta elección de coordenadas desacopla el movimiento del sistema en lo que se llaman sus modos *normales* de oscilación. Mientras que en las coordenadas x las ecuaciones de Newton están acopladas (x_2 aparece en la ecuación de x_1 y viceversa), en las coordenadas q las ecuaciones son independientes. Cada modo tiene asociada una frecuencia ω distinta

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m\ddot{q}_1 = -kq_1 = -m\omega_1^2\, q_1 \\ m\ddot{q}_2 = -(k + 2k')q_2 = -m\omega_2^2\, q_2 \end{cases} \tag{5}$$

PTV: usando el PTV recuperamos las ecuaciones de Newton

$$\begin{gathered} [-kx_1 + k'(x_2 - x_1) - m\ddot{x}_1]\, \delta x_1 + [-k'(x_2 - x_1) - kx_2 - m\ddot{x}_2]\, \delta x_2 = 0 \\ \downarrow \\ [-kq_1 - m\ddot{q}_1]\, \delta q_1 + [-(k + 2k')q_2 - m\ddot{q}_2]\, \delta q_2 = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

En este ejercicio el PTV no simplifica nada porque no hay fuerzas de vínculo.

c) ¿Cuánto valen las fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2? Es importante notar que las Q_k no tienen unidades de fuerza necesariamente, al igual que las coordenadas generalizadas tampoco tienen necesariamente unidades de posición (pueden ser ángulos por ej). Pero siempre se debe cumplir que $\delta W = Q_j \delta q_j$ tenga unidades de trabajo.

Calculamos Q_k usamos su definición dada en (3). Para que dependan de las coordenadas generalizadas, necesitamos expresar la fuerzas en función de q

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= [-kx_1 + k'(x_2 - x_1)]\, \hat{X} = \left[-k\, \frac{q_1 + q_2}{2} - k'q_2\right] \hat{X} \\ \boldsymbol{F}_2 &= [-k'(x_2 - x_1) - kx_2]\, \hat{X} = \left[-k\, \frac{q_1 - q_2}{2} + k'q_2\right] \hat{X} \end{aligned} \tag{7}$$

Por otro lado, invirtiendo la relación entre q y x de forma de obtener $x(q)$, podemos derivar

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{q_1 + q_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{q_1 - q_2}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} = \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1} = -\dfrac{\partial x_2}{\partial q_2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{8}$$

para obtener las fuerzas generalizadas

$$Q_1 = F_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + F_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = \frac{F_1 + F_2}{2} = -\frac{k}{2}\, q_1 \tag{9a}$$

$$Q_2 = F_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_2} + F_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_2} = \frac{F_1 - F_2}{2} = -\frac{k}{2}\, q_2 - k'\, q_2 \tag{9b}$$

Pueden chequear que utilizando las ecs de E-L de (3) se recuperan las ecs de Newton de (5).

En este ejercicio lidiamos con fuerzas elásticas, que son fuerzas conservativas. Es decir, tienen un potencial asociado: $\boldsymbol{F}_i(x) = -\boldsymbol{\nabla}_i V(x) = -\partial V/\partial \boldsymbol{x}_i$, donde V no depende de las velocidad. En este caso, las fuerzas generalizadas se reducen a

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i} \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{10}$$

Podríamos haber calculado Q_k de esta manera en nuestro ejercicio. El potencial total viene dado por la suma del potencial de cada resorte

$$V = \frac{k}{2} x_1^2 + \frac{k'}{2} (x_2 - x_1)^2 + \frac{k}{2} x_2^2 = \frac{k}{4} q_1^2 + \frac{k'}{2} q_2^2 + \frac{k}{4} q_2^2 \tag{11}$$

Pueden ver que derivando el potencial se llega al mismo resultado de la ecuación (9).

Por último, noten que si las fuerzas son conservativas y el potencial no depende de las velocidades, recuperamos la versión usual de las ecuaciones de E-L

Ecuaciones de Euler-Lagrange 2.0

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \qquad \mathcal{L} = T - V \tag{12}$$

De nuevo: usando las ecuaciones de E-L 2.0 recuperamos las ecuaciones de Newton.