Guía 2 - Ejercicio 2

Principios Variacionales

Ejercicio 2

Enunciado
Una partícula se encuentra sometida a un potencial V (r) = - k/r, de tipo gravitatorio. Suponiendo que las órbitas son circulares, encuentre la relación entre los períodos y los radios de las órbitas utilizando el principio variacional de Hamilton. *Ayuda: considere la ecuación paramétrica de la elipse* $x(\tau) = a\cos(\alpha\tau)$*,* $y(\tau) = b\,\mathrm{sen}(\alpha\tau)$*, y apartamientos de la trayectoria circular variando* a *ó* b*.*

Repitiendo un poco el enunciado, tenemos entonces a una partícula realizando una **trayectoria circular** en torno a un centro gravitatorio, por lo que vamos a tomar como origen de nuestro sistema de referencia a dicho centro. A partir de esta consideración, la trayectoria de la partícula se parametriza fácilmente

$$\mathbf{r}(t) = a\cos(\alpha t)\hat{x} + a\,\mathrm{sen}(\alpha t)\hat{y} \tag{1}$$

donde a es la distancia al centro, α su frecuencia angular (ambos constantes) y asumimos que la condición inicial es $\mathbf{r}(t_0 = 0) = a\hat{x}$.

Antes de seguir, vamos a olvidar por un momento que conocemos la trayectoria de la partícula y vamos a asumir que sólo conocemos dos puntos de la misma, de forma tal que sabemos que a tiempo $t = 0$ y $t = \frac{2\pi}{\alpha}$, $\mathbf{r} = a\hat{x}$. Existen infinitas trayectorias que pudo haber tenido la partícula para acabar en el mismo lugar despues de un intervalo $\Delta t = \frac{2\pi}{\alpha}$, como se muestra en la figura 1.

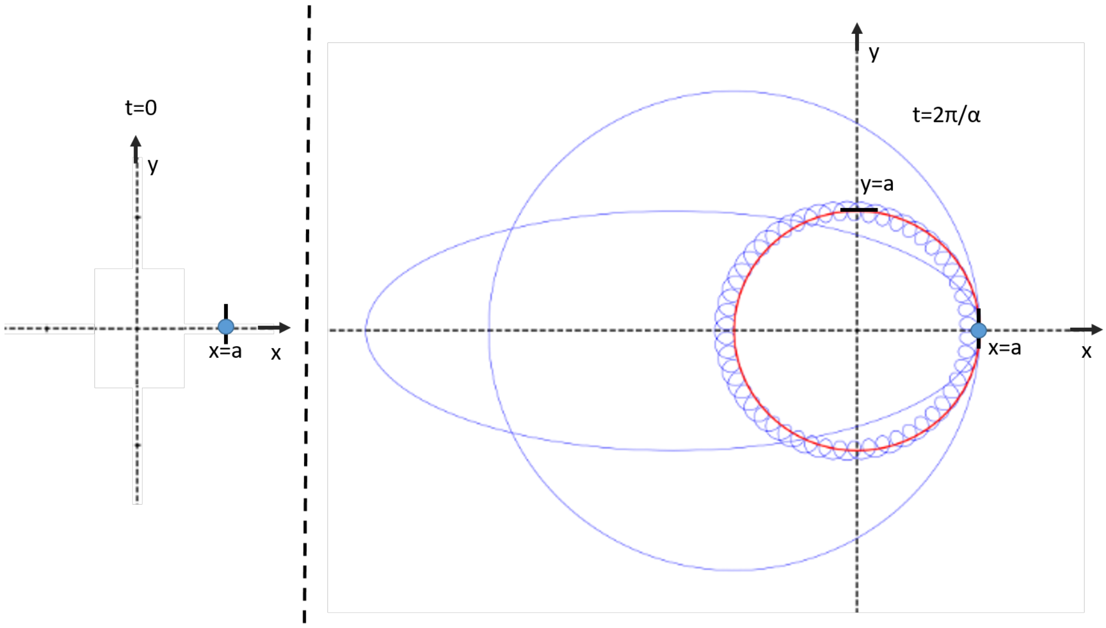

Figura 1: En rojo, la trayectoria circular efectiva que siguió la partícula. En azul, algunas de las muchísimas trayectorias que podría haber tenido, conociendo solo su configuración inicial y final.

Por lo tanto, si ahora incorporamos la información de que la partícula realizó efectivamente un movimiento circular en torno al centro, lo que nos dice el principio de Hamilton es que la acción, definida como $I = \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \mathcal{L} dt$, debe ser un extremo local para dicha trayectoria, es decir, $\delta I = 0$ (la variación a primer orden de la acción es nula). Noten que la integral se hace en un período de movimiento, donde ya sabemos que la posición inicial y final de la partícula es $x = a$, $y = 0$ (es importante que los extremos de la trayectoria estén fijos). Lo que vamos a ver es cómo obtener información de la órbita circular a partir de este principio (**no** vamos a demostrar que la trayectoria es circular). Acá podemos tomar la sugerencia del enunciado, que incita a realizar pequeños apartamientos de la órbita circular hacia órbitas elípticas. Es decir, dada la parametrización de la órbita, uno puede realizar fácilmente pequeños apartamientos de dicha trayectoria en la dirección $\hat{y}$ (ver figura 2), de forma tal de mantener fijas la posición inicial y final de la partícula, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\alpha t) \\ y(t) &= a\,\mathrm{sen}(\alpha t) \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} x(t) &= \quad a\cos(\alpha t) \\ y(t) &= \quad (a+\delta a)\,\mathrm{sen}(\alpha t) \end{cases} \tag{2}$$

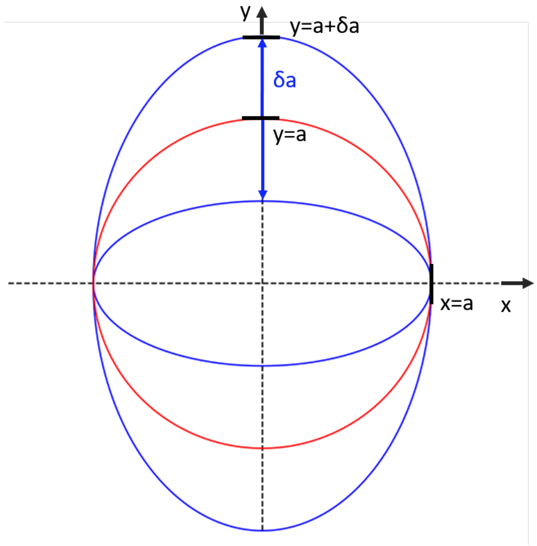

Figura 2: Vemos un esquema de cómo perturbar la trayectoria circular en la dirección y.

O sea que para la familia de órbitas elípticas centradas en el origen con parametrización

$$\mathbf{r}(t) = a\cos(\alpha t)\hat{x} + b\,\mathrm{sen}(\alpha t)\hat{y} \tag{3}$$

la acción $I = \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \mathcal{L}(a,b,\alpha)dt$ es extrema cuando $a = b$, en un entorno cercano a dicha órbita circular. Es decir que la variación a primer orden de la acción en dicho entorno es nula

$$\delta I = \delta\left[\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \mathcal{L}(a,b,\alpha)dt\right] = \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \left[\frac{\partial\mathcal{L}(a,b,\alpha)}{\partial b}\bigg|_{b=a}\delta b\right] dt = 0 \tag{4}$$

Gráficamente, podemos representar este hecho coloreando las órbitas elípticas de esta familia en un entorno cercano a la órbita circular, de acuerdo al valor que debería tomar la acción, como se muestra en la figura 3.

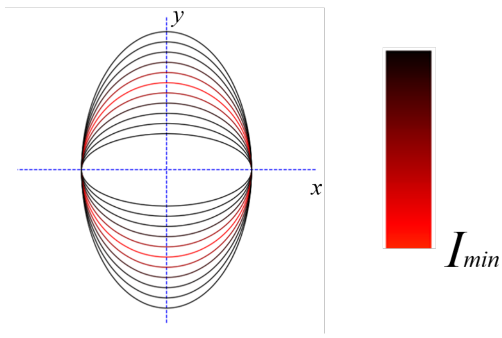

Figura 3: Esquema de cómo la acción toma un valor mínimo para la trayectoria circular.

Notamos que las variables a, b y α **no** son las coordenadas generalizadas del problema sino parámetros fijos que definen la trayectoria. Además, fíjense que para la órbita elíptica, α no representa la velocidad angular de la partícula. El ángulo θ de las coordenadas polares a partir del cual describimos la posición de la partícula se calcula como $tg(\theta) = y/x = (1 + \frac{\delta a}{a})tg(\alpha t)$. Para $\delta\alpha = 0$ recuperamos $\dot{\theta} = \alpha$.

Dicho todo esto, calculemos de forma explícita δI y veamos qué condiciones deben cumplirse para que tal variación sea efectivamente nula. Por un lado, tenemos que el Lagrangiano para una trayectoria circular

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\alpha t) \\ y(t) &= a\cdot\operatorname{sen}(\alpha t) \end{aligned}\right\} \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\alpha^2[\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2] + \frac{k}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \frac{1}{2}m\alpha^2 a^2 + \frac{k}{a} \tag{5}$$

Y por lo tanto, la acción

$$I_0 = \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \mathcal{L}dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \left[\frac{1}{2}m\alpha^2 a^2 + \frac{k}{a}\right] dt \tag{6}$$

Pero si perturbamos el alcance de la trayectoria en la dirección $\hat{y}$ (como mostramos en la figura 2) tenemos que

$$\begin{aligned} \left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\alpha t) \\ y(t) &= (a+\delta a)\operatorname{sen}(\alpha t) \end{aligned}\right\} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\alpha^2\left[a^2\operatorname{sen}^2(\alpha t) + (a+\delta a)^2\cos^2(\alpha t)\right] \\ &+ \frac{k}{\sqrt{a^2\cos^2(\alpha t) + (a+\delta a)^2\operatorname{sen}^2(\alpha t)}} \end{aligned} \tag{7}$$

Las variaciones de δa son tan chicas como uno quiera, por lo que es válido quedarse únicamente con las variaciones a orden 1. Si desarrollamos en Taylor a primer orden la expresión obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (a+\delta a)^2 &\sim a^2 + 2a\delta a \\ \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2(\alpha t) + (a+\delta a)^2\operatorname{sen}^2(\alpha t)}} &\sim \frac{1}{a} - \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha t)}{a^2}\delta a \end{aligned} \tag{8}$$

Y por lo tanto, la acción queda expresada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \left[\frac{1}{2}m\alpha^2 a^2 + \frac{k}{a}\right] dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \left\{\left[ma\alpha^2\cos^2(\alpha t) - \frac{k\operatorname{sen}^2(\alpha t)}{a^2}\right]\delta a\right\} dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \left[\frac{1}{2}m\alpha^2 a^2 + \frac{k}{a}\right] dt + \left\{\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \left[m\alpha^2 a\cos^2(\alpha t) - \frac{k\operatorname{sen}^2(\alpha t)}{a^2}\right] dt\right\}\delta a \\ I &= I_0 + \delta I \end{aligned} \tag{9}$$

Ahora, queda pedir que $\delta I = 0$. En principio, uno podría estar tentado de pedir que el integrando se anule, y de esa forma conseguir que $\delta I = 0$. Sin embargo, si prueban hacer eso, van a obtener el siguiente resultado

$$\frac{k}{ma^3\alpha^2} = tg^2(\alpha t) \tag{10}$$

Esto esta **mal** por muchas razones. Primero que nada, la misma definición de la acción nos dice que es la integral del Lagrangiano a lo largo de la curva que define el cuerpo en el espacio de configuración (tomando como parámetro al tiempo), por lo que no tiene sentido evaluar al argumento de la integral en un diferencial de tiempo. Además, de hacerlo, es fácil notar que es imposible satisfacer esa igualdad para todo tiempo dado que el término de la izquierda es constante. Por último, si pedimos que $\alpha = 0$ para que $tg(\alpha t) = 0$, el resultado de la izquierda diverge, sin mencionar que no tendría sentido físico una trayectoria circular sin frecuencia.

Entonces, tenemos que calcular la integral con el siguiente cambio de variables $\alpha t = \phi$, $\alpha dt = d\phi$ (*Recordamos:* $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) d\phi = \pi$)

$$\begin{aligned} \delta I &= \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha} \left[ma\cos^2(\phi)\alpha^2 - \frac{k}{a^2}\operatorname{sen}^2(\phi) \right] d\phi \right\} \delta a \\ &= \frac{\pi}{\alpha}\left(ma\alpha^2 - \frac{k}{a^2} \right) \delta a \end{aligned} \tag{11}$$

Luego,

$$\delta I = 0 \Longleftrightarrow \alpha^2 = \frac{k}{a^3 m} \tag{12}$$

Conseguimos la relación que debe haber entre el radio y el período para que la trayectoria circular cumpla con el principio de Hamilton. Volvemos a repetir que con esto no demostramos que la órbita sea circular, sino que, siendo la ótbita circular la trayectoria efectiva de la partícula, ésta debe cumplir la relación 12.

Otra cosa importante de notar es que el resultado que tuvimos es el mismo resultado que tuvo Kepler cuando postuló su tercera ley en 1619 para los planetas del sistema solar: *Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica*

$$\frac{T^2}{a^3} = cte \tag{13}$$

dondte T es el período orbital y a el semieje mayor. Y acá tenemos

$$\frac{1}{\alpha^2 a^3} = \frac{m}{k} \rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k} \tag{14}$$

donde a es el semieje mayor de una elipse con excentricidad nula (o sea, el radio del círculo).