Guía 1: Ecuaciones de Lagrange: Problema 6 a y b.

Mecánica Clásica
Vladimir D. Rodríguez Chariarse

Introducción

Se ejemplifica el uso de las ecuaciones de Lagrange para el caso de fuerzas conservativas (que derivan de un potencial). Es importante:

- Identificar el caracter del movimiento de cada partícula, el número de grados de libertad del sistema, y una buena elección de coordenadas generalizadas.
- Calcular la energía cinética T a partir del cálculo de las velocidades de las partículas en el sistema.
- Evaluar correctamente los potenciales que entran en V, regla fundamental: el potencial gravitatorio crece con la altura, por lo que si el eje vertical apunta para abajo entonces se le debe agregar un signo $-$.
- Los dos problemas tratados tienen una o dos masas con movimiento en un plano, y las coordenadas generalizadas apropiadas son coordenadas polares, la velocidad se expresa como es sabido por
$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}$$
y su cuadrado (por ser coordenadas curvilineas ortogonales):
$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2$$
.
- Siendo ambos problemas sistemas conservativos se conserva la energía $E = T + V$. Mas adelante veremos como derivar esto a partir de las simetrías del Lagrangiano. Como ejercicio en el problema 6a realizaremos una primera integral de la ecuación de movimiento radial (pasar de ecuaciones de segundo orden en el tiempo a primer orden).

  Recordemos el Lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange para este caso conservativo:
$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = T - V$$
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}\Big) = \frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i} \tag{1}$$
donde $q_i,\ \dot{q}_i$ las coordenadas y velocidades generalizadas.

Problema 6.

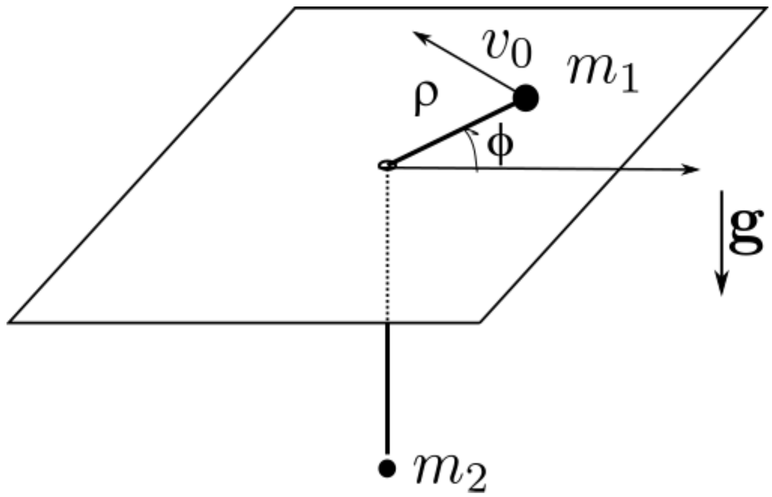

Figura 1: Problema 6a

De la figura se deduce que la masa m_1 posee un movimiento plano por lo que las coordenadas son polares en dicho plano: ρ y ϕ. La masa m_2 se mueve en el eje vertical, su coordenada sería z (positivo hacia abajo). El vínculo es la longitud de la soga: $L = z + \rho$, por lo que los grados de libertad son solamente dos. Elegimos como coordenadas generalizadas:ρ, ϕ.

Teniendo en cuenta lo puntualizado anteriormente, obtenemos:

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{\rho}^2 \qquad V = -m_2 g(L - \rho)$$

$$\mathcal{L}(\dot{\rho}, \dot{\phi}, \rho) = \frac{(m_1 + m_2)}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + m_2 g(L - \rho) \tag{2}$$

Ecuaciones de Lagrange

Usamos ahora las ecuaciones de Lagrange (1) con el Lagrangiano (2) para ambas coordenadas:

Para ρ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = (m_1 + m_2)\dot{\rho} \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\Big) = (m_1 + m_2)\ddot{\rho}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = m_1\rho\dot{\phi}^2 - m_2(L - \rho)\dot{\phi}^2 - m_2 g\cos(\phi)$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{\rho} = m_1\rho\dot{\phi}^2 - m_2 g \tag{3}$$

esta ecuación también se obtiene sumando dos de las ecuaciones de Newton (¿cuales?), por lo que la tension de la cuerda se cancela.

La ecuación de Lagrange para ϕ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m_1 \rho^2 \dot{\phi} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, (\text{coordenada cíclica}) \quad p_\phi = m_1 \rho^2 \dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1 \rho^2 \dot{\phi}) = 0 \tag{4}$$

De (4) se deduce la conservación del momento generalizado p_ϕ:

$$m_1 \rho^2 \dot{\phi} = l_z \quad \text{momento angular en la dirección } z \text{ constante}$$

despejando de aquí $\dot{\phi}$ y reemplazando en (3) obtenemos:

$$(m_1 + m_2)\ddot{\rho} = \frac{l_z^2}{m_1 \rho^3} - m_2 g \tag{5}$$

Esta ecuación define un problema unidimensional equivalente para la coordenada ρ.

Equilibrio. Podemos ver que hay un condición de equilibrio para ρ, que es cuando $\ddot{\rho} = 0$:

$$\frac{l_z^2}{m_1 \rho_0^3} = m_2 g \tag{6}$$

Si inicialmente $\dot{\rho}(0) = 0$, y se cumple la relación anterior, entonces $\ddot{\rho}(0) = 0$ y $\rho(t) = \rho_0$, por lo que el movimiento de m_1 es circular, y m_2 se sostiene a una altura fija.

Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio. Podemos linealizar las ecuación (5), haciendo una expansión de Taylor a primer orden en la variable ρ, alrededor del valor de equlibrio ρ_0:

$$(m_1 + m_2)\ddot{\rho} = -k(\rho - \rho_0)$$

donde

$$k = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{l_z^2}{m_1 \rho^3} - m_2 g\right)\Big|_{\rho_0} = \frac{3 l_z^2}{m_1 \rho_0^4}$$

usando la condición de equilibrio se obtiene:

$$k = \frac{3 m_2 g}{\rho_0}$$

Finalmente podemos definir la variable $\eta = \rho - \rho_0$, y se obtiene la ecuación de un oscilador armónico ($\ddot{\rho} = \ddot{\eta}$)

$$(m_1 + m_2)\ddot{\eta} = -k\eta$$

obteniendo para la variable ρ:

$$\rho = \rho_0 + a\cos(\omega t + \varphi), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{3 m_2 g}{(m_1 + m_2)\rho_0}}$$

Integrales primeras. Las ecuaciones de Lagrange son ecuaciones de segundo orden en el tiempo. En algunos casos, es posible obtener integrales primeras a partir de ellas (ecuaciones de primer orden en el tiempo), lo que da lugar a magnitudes conservadas. Por ejemplo la conservación de l_z. Otra magnitud conservada se puede derivar de (5). Denotando el segundo término como

$$-\frac{dV_{ef}(\rho)}{d\rho} = \frac{l_z^2}{m_1\rho^3} - m_2 g \quad \Rightarrow \quad V_{ef}(\rho) = \frac{l_z^2}{2m_1\rho^2} - m_2 g\rho$$

multiplicando ambos miembros de (5) por $\dot{\rho}$,

$$(m_1 + m_2)\underbrace{\dot{\rho}\ddot{\rho}}_{\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\dot{\rho}^2} = -\underbrace{\frac{dV_{ef}(\rho)}{d\rho}\dot{\rho}}_{\frac{d}{dt}V_{ef}(\rho)} \tag{7}$$

que puede ser integrada para obtener:

$$\frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\rho}^2 + V_{ef}(\rho) = E \text{ constante, donde} \quad V_{ef}(\rho) = \frac{l_z^2}{2m_1\rho^2} - m_2 g\rho \tag{8}$$

La ecuación (8) es la conservación de la energía, expresada en términos del problema unidimensional equivalente en la coordenada ρ. Mas adelante veremos que las magnitudes conservadas están relacionadas a simetrías del sistema (Teorema de Emily Nöther). Al término $\frac{l_z^2}{2m_1\rho^2}$ se lo denomina potencial centríifugo pues es repulsivo y proviene de un valor no nulo de momento angular l_z.

Como en el caso unidimensional esta conservación nos permite definir para valores dados de E (energía) y de l_z (momento angular) los valores posibles de la coordenada ρ (usando que la parte cinética debe ser positiva):

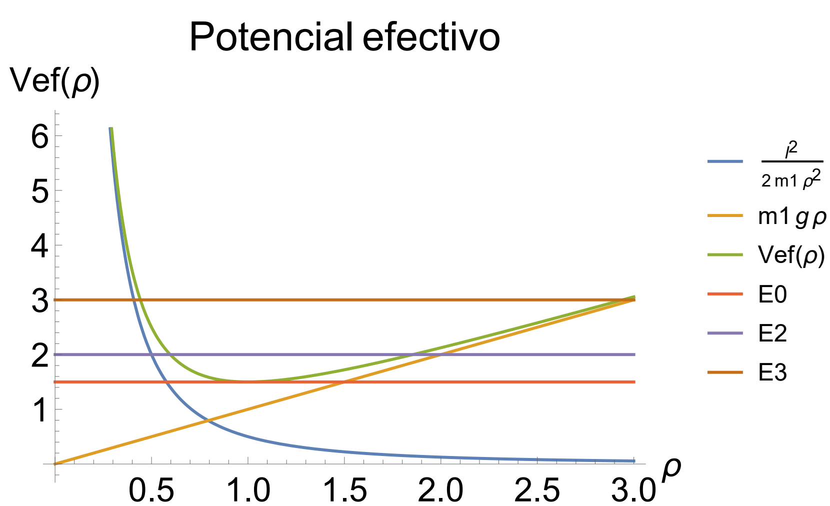

Figura 2: Problema unidimensional equivalente. E_0 es la energía de movimiento circular, las otras dos energías tienen dos puntos de retorno (cuando $V_{ef}(\rho) = E$).

Condiciones iniciales

Para el problema se tiene que a $t = 0$:

$$\rho = \rho_0 \quad \rho_0 \dot{\phi}_o = v_0 \quad \Rightarrow l_z = m_1 \rho_0 v_0 \quad \dot{\rho}_0 = 0 \quad \Rightarrow E = \frac{m_1}{2} v_0^2 + m_2 g \rho_0$$

En este caso E es la energía a menos de una constante $-m_2 g L$, o tomando el cero de potencial en $z = -L$ para la masa m_2.

Pregunta ¿Cuanto debe valer v_0 para que m_1 tenga una trayectoria circular de radio ρ_o? De la Fig. 2 la energía debe ser la mínima posible, para lo cual ρ_o debe satisfacer $\frac{\partial V_{ef}}{\partial \rho}|_{\rho_0} = 0$ y $E = V_{ef}(\rho_0)$. Usando (8) y el valor de l_z obtenemos una condición sobre v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} g \rho_0}$$

como $\dot{\rho}_0 = 0$, se cumple tiene $E = V_{ef}(\rho_0) = \frac{3}{2} m_2 g \rho_0$

Se pide al alumno que verifique este resultado usando movimiento circular uniforme para la masa m_1, caso en el cual la fuerza centrípeta es la tensión que es igual al peso de m_2.

Es útil parametrizar la velocidad inicial en función de un parámetro s,

$$v_0 = \sqrt{s g \rho_0}$$

tal que si $s = s_0 = m_2/m_1$ se tiene un movimiento circular. Si $s < s_0$, ρ_0 es el menor punto de retorno, si Si $s > s_0$, ρ_0 es el mayor punto de retorno. Los puntos de retorno se obtienen de:

$$E = \frac{m_1}{2}(5 + 2s_0) g \rho_0 = (\frac{\rho_0}{\rho})^2 g \rho_0 s + m_2 g \rho \ \Rightarrow (s + 2s_0) = s u^{-2} + 2 s_0 u \quad \text{donde} \quad u = \frac{\rho}{\rho_0}$$

se verifica que $u = 1$ es solución, por lo que $\rho = \rho_0$ es un punto de retorno. Factorizando $(u - 1)$ de la ecuación cúbica se obtiene una ecuación cuadrática para u cuyas soluciones son:

$$u = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 8 s_0 s}}{4 s_0}$$

solamente la raiz positiva es la físicamente correcta, por lo que el otro punto de retorno es el valor positivo de:

$$\rho^* = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 8 s_0 s}}{4 s_0} \rho_0$$

Tensión de la cuerda

En esta parte de la guía usaremos una de las ecuaciones de Newton para hallar la fuerza de vínculo[1]. Basta plantear la ecuación de movimiento para la masa m_2 :

$$m_2\ddot{z} = -T + m_2 g \quad \Rightarrow \quad T = m_2\Big(g - \frac{1}{m_1 + m_2}\big(\frac{l_z^2}{m_1\rho^3} - m_2 g\big)\Big)$$

donde aquí T es la tensión de la cuerda, y se ha usado (5).

[1]La otra alternativa es usar mutiplicadores de Lagrange.