Guía 3 - Ejercicio 6

Fuerzas Centrales

Enunciado

Un satélite de masa m se mueve en un potencial central atractivo, $V(r) = -k/r$. Súbitamente el valor de la constante k se reduce a la mitad. Encuentre la nueva órbita.

Resolución

Para poder entender cómo se modifica la órbita del satélite en este problema, vamos a partir de toda la base que ya conocemos acerca del problema de Kepler. Primero de todo, sabemos que el movimiento se da en un plano por la conservación del momento angular (como sucede con cualquier fuerza central), así que utilizaremos como coordenadas generalizadas a r y ϕ (polares), correspondientes a un plano normal a l_z. Por otro lado, sabemos que la energía se conserva (pueden plantear el lagrangiano, ver que $h = cte$ y que además $h = E$). Con estas dos conservaciones, planteamos el problema unidimensional equivalente

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\boxed{\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}}}_{V_{eff}} \tag{1}$$

Y obtenemos que, de acuerdo a la energía del satélite, el mismo estará teniendo un movimiento acotado en torno al origen o no acotado.

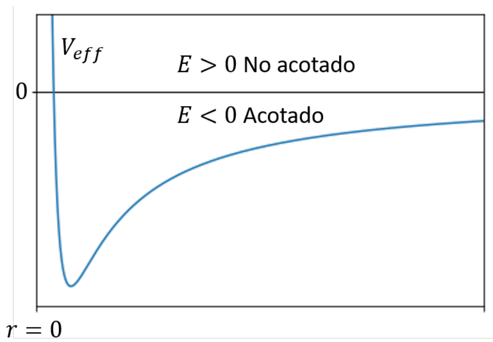

Figura 1: Esquema del potencial efectivo de Kepler

Ahora bien, el problema nos pide hallar la nueva órbita del satélite si repentinamente se reduce a la mitad la constante k. Lo primero que notamos es que, si la constante se reduce arbitrariamente a un valor $k' < k$, la energía del satélite aumenta de la siguiente manera

$$E' = E + \frac{k - k'}{r_0} \tag{2}$$

donde r_0 es la posición del satélite en el momento en que la constante gravitatoria se reduce.

Concluimos entonces que la nueva órbita no sólo depende del movimiento inicial del satélite (determinado por su energía) sino también de la posición en el momento en que se reduce la constante. Asimismo, como la energía aumenta, si el movimiento inicial del satélite era no acotado (parabólico o hiperbólico), luego el movimiento seguirá siendo no acotado, si bien su órbita variará de acuerdo al cambio de energía.

Antes de ver en detalle cómo se modifica cuantitativamente la órbita, analicemos el caso en que el satélite se encuentre orbitando acotadamente en torno al centro de fuerzas. En ese caso, existen varias posibilidades, ya que el movimiento podría quedar acotado o no, como se esquematiza en la figura siguiente

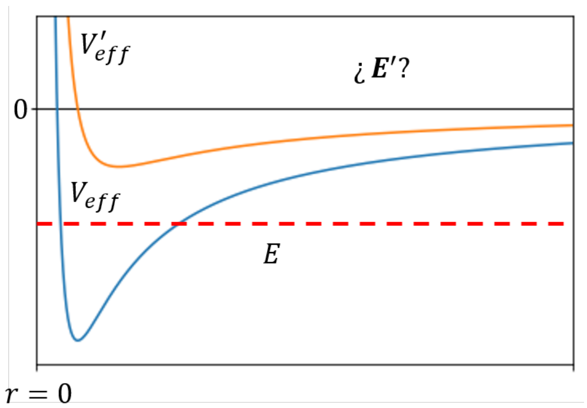

Figura 2: Esquema del cambio en el potencial efectivo, dada una reducción en la constante gravitatoria

La trayectoria de una partícula sometida a un potencial kepleriano tiene la siguiente forma

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{k^2 m}}; \quad r(\phi) = \frac{l^2/(km)}{1 + \epsilon \cos(\Delta\phi)} \begin{cases} \epsilon > 1 & \text{órbita hiperbólica} \\ \epsilon = 1 & \text{órbita parabólica} \\ \epsilon < 1 & \text{órbita elíptica} \\ \epsilon = 0 & \text{órbita circular} \end{cases} \tag{3}$$

La energía del sistema define de forma unívoca a la excentricidad de la órbita, que determina el tipo de trayectoria. Por lo tanto, basta calcular ϵ' para conocer la nueva órbita.

$$\epsilon' = \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{k^2m} + \frac{2l^2(k-k')}{r_0k^2m}} \tag{4}$$

Para que la órbita siga siendo acotada debe suceder que $\epsilon' < 1$, luego

$$1 + \frac{2l^2E}{k^2m} + \frac{2l^2(k-k')}{r_0k^2m} < 1 \Longleftrightarrow E < -\frac{k-k'}{r_0} \tag{5}$$

En caso contrario, la órbita pasa a ser no acotada. Noten que, si bien estamos asumiendo una reducción en la constante gravitatoria ($k' < k$), el planteo realizado es sumamente general, y el mismo aplica para cualquier variación súbita en k.

Veamos como ejemplo un caso donde la órbita inicial del satélite es circular. En este caso sucede que al reducir a la **mitad** a k

$$E' = E + \frac{k}{2r_c} \tag{6}$$

donde r_c es el radio de la órbita circular kepleriana, que se obtiene de la siguiente forma

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = 0 \Longleftrightarrow r_c = \frac{l^2}{km} \tag{7}$$

Pueden chequear también que la energía correspondiente a la órbita circular es

$$E = -\frac{k^2m}{2l^2} \tag{8}$$

(noten que con esta energía $\epsilon = 0$, y una elipse con excentricidad nula es un círculo). Por lo tanto, obtenemos que

$$E' = 0 \Rightarrow \epsilon' = 1 \tag{9}$$

es decir que la nueva órbita es parabólica (movimiento no acotado).