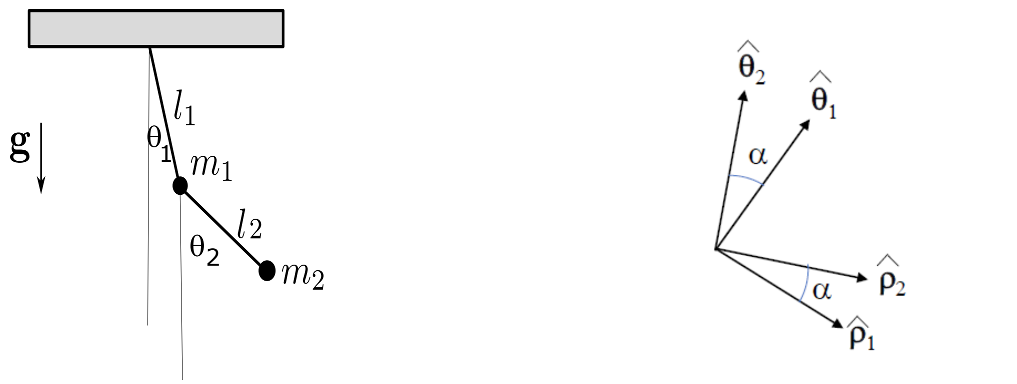
Guía 1: Ecuaciones de Lagrange: Problema 10.

Mecánica Clásica
Vladimir D. Rodríguez Chariarse

Problema 10.



(a) Problema 10

(b) Versores polares de cada masa.

Figura 1: Coordendas generalizadas y versores.

De la figura **??** se deduce que las masas $m_{1,2}$ poseen un movimiento plano. Las coordenadas elegidas para los dos grados de libertad del sistema son: θ_1, y θ_2.

La masa m_1 se mueve en órbita circular de radio fijo $\rho = l_1$, por lo que su velocidad en polares es:

$$v_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

la velocidad de la masa m_2 es la suma de la velocidad de m_1 mas la velocidad de m_2 con respecto a m_1

$$\mathbf{v_2} = l_1\dot{\theta}_1\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{1} + l_2\dot{\theta}_2\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{2}$$

y su cuadrado es:

$$v_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\hat{\theta}_\mathbf{1}\cdot\hat{\theta}_\mathbf{2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \quad\Rightarrow\quad v_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

donde se usó la figura **??**, y que $\alpha = \theta_2 - \theta_1$. La energía potencial de cada masa se calcula usando la coordenada vertical respectiva desde el punto de apoyo, obteniendose

$$V_1 = -m_1gl_1\cos(\theta_1) \quad V_2 = -m_2g(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_1))$$

uniendo estos resultados obtenemos el Lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L}(\theta_1,\theta_2,\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2) = \frac{m_1}{2}l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\Big(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) + l_2^2\dot{\theta}_2^2\Big) + m_1gl_1\cos(\theta_1) + m_2g\big(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_2)\big) \quad (1)$$

Las ecuaciones de Lagrange se calculan con paciencia y esmero:

Para θ_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2\Big(l_1^2\dot{\theta}_1 + l_1 l_2 \cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2\Big) \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\Big) &= (m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2-\theta_1) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2-\theta_1) - (m_1+m_2) g l_1 \sin(\theta_1)
\end{aligned} \tag{2}$$

Obteniendose la ecuación de Lagrange para θ_1:

$$(m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2-\theta_1) = -(m_1+m_2) g l_1 \sin(\theta_1) \tag{3}$$

Para θ_2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\Big) &= m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2-\theta_1) - m_2 g l_2 \sin(\theta_2)
\end{aligned} \tag{4}$$

Obteniendose la ecuación de Lagrange para θ_2:

$$m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 = -m_2 g l_2 \sin(\theta_2) \tag{5}$$

Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio estable

Observemos que el equilibrio estable para este problema está dado por: $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Para pequeños apartamientos del equilibrio linealizamos las ecuaciones de Lagrange alrededor de valores: $\theta_1 \sim 0$, $\theta_2 \sim 0$, $\dot{\theta}_1 \sim 0$, $\dot{\theta}_2 \sim 0$. Las velocidades son también pequeñas pues la energía del sistema está solamente un poco por arriba del valor mínimo. Usando $sin(\theta_1) \sim \theta_1$, $\sin(\theta_2-\theta_1) \sim \theta_2-\theta_1$, $\cos(\theta_2-\theta_1) \sim 1$ a primer orden, además de despreciar los términos de segundo orden: $\dot{\theta}_1^2$, $\dot{\theta}_2^2$ y $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$, obtenemos las ecuaciones linealizadas:

$$\begin{gathered}
(m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 = -(m_1+m_2) g l_1 \theta_1 \\
m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \ + \ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 = -m_2 g l_2 \theta_2
\end{gathered} \tag{6}$$

Definiendo:

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} (m_1+m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -(m_1+m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & -m_2 g l_2 \end{pmatrix}.$$

el sistema lineal se escribe en forma vectorial:

$$\boldsymbol{T}\ddot{\vec{\theta}} = -\boldsymbol{V}\vec{\theta}$$

Proponiendo soluciones armónicas: $\vec{\theta} = \vec{a}e^{i\omega t}$ (se toma la parte real al final), la segunda derivada temporal es $\ddot{\vec{\theta}} = -\omega^2\vec{\theta}$, obteniendo la ecuación de autovalores generalizada:

$$\boldsymbol{V}\vec{a} = \omega^2\boldsymbol{T}\vec{a}$$

El sistema de ecuaciones tiene solución no trivial si $|\boldsymbol{V} - \omega^2\boldsymbol{T}| = 0$ lo cual es una ecuación de segundo grado para ω^2, cuyas dos soluciones positivas dan las denominadas frecuencias de oscilación normales, y los autovectores $\vec{a}$ asociados son denominados modos normales de oscilación.

Para el caso de dos péndulos iguales: $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l$ se obtiene:

$$\omega_\pm = (2 \pm \sqrt{2})\frac{g}{l}$$

y los autovectores son:

$$\vec{a}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

El movimiento mas general es una combinación lineal de las soluciones:

$$\vec{\theta}(t) = A_+\vec{a}_+e^{i\omega_+ t} + A_-\vec{a}_+e^{i\omega_- t}$$

tomado la parte real:

$$\vec{\theta}(t) = \alpha_+\vec{a}_+\cos(\omega_+ t + \phi_+) + \alpha_-\vec{a}_-\cos(\omega_- t + \phi_-)$$

Esta solución depende de cuatro constantes arbitrarias que son definidas por las condiciones iniciales del problema. Para la condición inicial $\theta_1 = \theta_2 = 0$ las fases son $\phi_+ = \phi_- = -\pi/2$, por lo que

$$\vec{\theta}(t) = \alpha_+\vec{a}_+\sin(\omega_+ t) + \alpha_-\vec{a}_-\sin(\omega_- t)$$

la condición de resposo a $t = 0$ de la masa m_1 nos provee la relación que existe entre las amplitudes $\alpha_\pm$

$$\dot{\theta}_1(0) = \omega_+\alpha_+ + \omega_-\alpha_- = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_+ = -(\sqrt{2} - 1)\alpha_-$$

la presencia del modo de menor frecuencia es casi el doble que el de mayor frecuencia. Falta determinar una amplitud global que es dada por $\dot{\theta}_2(0)$.

Tensiones en los hilos

Veamos s la figura **??** para relacionar lo versores polares de ambas partículas:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\mathbf{2}} &= \cos(\theta_2 - \theta_1)\hat{\rho}_{\mathbf{1}} + \sin(\theta_2 - \theta_1)\hat{\theta}_{\mathbf{1}} \\ \hat{\theta}_{\mathbf{2}} &= -\sin(\theta_2 - \theta_1)\hat{\theta}_{\mathbf{1}} + \cos(\theta_2 - \theta_1)\hat{\rho}_{\mathbf{1}} \end{aligned} \tag{7}$$

Usando Newton para m_1:

$$m_1\mathbf{\ddot{r}_1} = \mathbf{F_1}$$

necesitaremos:

$$\mathbf{\ddot{r}_1} = l_1\ddot{\theta}_1\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{1} - l_1\dot{\theta}_1^2\hat{\rho}_\mathbf{1}$$

$$\mathbf{F_1} = -T_1\hat{\rho}_\mathbf{1} + T_2\hat{\rho}_\mathbf{2} + m_1 g\sin(\theta_2-\theta_1)\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{1} - m_1 g\cos(\theta_2-\theta_1)\hat{\rho}_\mathbf{1}$$

donde el peso de m_1 está en componentes $\hat{\rho}_\mathbf{1}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{1}$, y $T_{1,2}$ son las tensiones. Con estas tres ecuaciones a mano es relativamente simple obtener las tensiones en función de aceleraciones, velocidades y coordenadas. Finalmente reemplazando las aceleraciones obtenidas der las ecuaciones de Lagrange se obtienen las tensiones en función de velocidades y coordenadas generalizadas. No es necesario escribir una expresión explícita.