Mecánica Analítica - 2°C 2021
Guía 1 - Problema 7

Link, Tomás J.; Vargas, Camila L.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

(13 de Septiembre, 2021)

I. ENUNCIADO

Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre una superficie cónica definida por $\theta = \alpha$, donde θ es el ángulo polar de las coordenadas esféricas.
Entonces:

a) Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo ϕ y el radio r de las coordenadas esféricas habituales.

b) Halle el r máximo y el r mínimo para el caso en que $\alpha = 30$ y las condiciones iniciales sean $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0)^2 = 4\sqrt{3}g/a$

c) Halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.

d) Suponiendo que la partícula está en movimiento circular, halle la constante del oscilador y el período de oscilación para pequeñas perturbaciones alrededor de este movimiento. Compare el período de las oscilaciones con el período de revolución y describa cualitativamente la órbita de la partícula.

II. RESOLUCIÓN

Los grados de libertad de un sistema quedan definidos por la ecuación $n = 3N - m$, donde N es la cantidad de partículas del sistema y m la cantidad de vínculos. En este caso hay una única partícula y existe un vínculo $\theta = \alpha$ que fija el ángulo polar. Por lo tanto, el sistema tiene sólo dos grados de libertad. Tomaremos como **coordenadas generalizadas** a r y ϕ de esféricas.

A. Ecuaciones de movimiento

Para obtener las ecuaciones de movimiento utilizaremos que las fuerzas del sistema son conservativas y por lo tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L) se pueden expresar como

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

donde $\mathcal{L}$ es el lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$ del sistema.

En general, la velocidad expresada en coordenadas esféricas es

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2$$

Como en este caso $\theta = \alpha$ es constante, la expresión se reduce a:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2$$

Por lo tanto la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2\right)$$

Por otra parte, la energía potencial es

$$V = mgz = mgr\cos\theta = mgr\cos\alpha$$

Entonces, el lagrangiano del sistema es

$$\boxed{\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2\right) - mgr\cos\alpha}$$

Para la coordenada r tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} &= m\dot{r} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} &= m\ddot{r} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} &= mr\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2 - mg\cos\alpha \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de E-L para r es

$$\boxed{\ddot{r} - r\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2 + g\cos\alpha = 0} \tag{1}$$

Para la coordenada ϕ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} &= mr^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= 0 \end{aligned}$$

En este caso la ecuación de E-L se reduce a:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = 0}$$

Esto quiere decir que la coordenada ϕ es **cíclica** ya que el lagrangiano no depende de ella. La cantidad $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ es entonces constante y representa la componente en z del momento angular:

$$l_z = mr^2\sin^2\alpha\dot{\phi} \tag{2}$$

Aplicando la derivada temporal, la ecuación de E-L para ϕ también puede expresarse como:

$$m\sin^2\alpha\left(2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi}\right) = 0$$

$$\boxed{2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} = 0}$$

B. Máximos y mínimos de la coordenada radial

De la ecuación 2 podemos despejar

$$\dot{\phi} = \frac{l_z}{mr^2\sin^2\alpha} \tag{3}$$

Y reemplazar esto en la expresión de la energía mecánica total:

$$E = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\left(\frac{l_z}{mr^2\sin^2\alpha}\right)^2\right] + mgr\cos\alpha$$
$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{m^2r^2\sin^2\alpha}\right) + mgr\cos\alpha$$

Aplicando la condición $\dot{r} = 0$ que ocurre tanto en r_{max} como en r_{min}, se obtiene:

$$E = \frac{l_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$$

Si además imponemos la condición $\alpha = 30$:

$$E = \frac{2l_z^2}{mr^2} + mgr\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4}$$

De las condiciones iniciales se tiene que $E = mga\sqrt{3}$, y $l_z^2 = (\sqrt{3}m^2a^3g)/4$.

Reemplazando esto en la ecuación 4, se obtiene

$$mga\sqrt{3} = \frac{2l_z^2}{r^2m} + mgr\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$a = \frac{a^3}{2r^2} + \frac{r}{2}$$
$$0 = r^3 - 2ar^2 + a^3$$

Vemos que $r_1 = a$ es solución de esta ecuación cúbica y entonces se puede factorizar como:

$$0 = (r-a)(r^2 - ar - a^2)$$

Las raíces de la ecuación cuadrática son reales, una positiva y otra negativa. Como $r > 0$, descartamos la raíz negativa y tenemos que $r_2 = \frac{(1+\sqrt{5})a}{2}$. Como $r_1 < r_2$, se concluye que:

$$\boxed{r_{min} = a} \qquad \boxed{r_{max} = \frac{(1+\sqrt{5})a}{2}}.$$

C. Potencial efectivo unidimensional equivalente y órbitas circulares

Reemplazando la expresión de ϕ de la ecuación 3 en la ecuación 1 de E-L para r se obtiene:

$$\ddot{r} - \frac{l_z^2}{m^2r^3\sin^2\alpha} + g\cos\alpha = 0 \tag{5}$$

que representa un problema unidimensional equivalente para la coordenada r. Para hallar el potencial efectivo se puede utilizar el truco de multiplicar cada término por $\dot{r}$ y luego integrar:

$$\ddot{r}\dot{r} - \frac{l_z^2\dot{r}}{m^2r^3\sin^2\alpha} + g\dot{r}\cos\alpha = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2m^2r^2\sin^2\alpha} + gr\cos\alpha\right) = 0$$

Por lo tanto, se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{ef} = \varepsilon$$

donde ε es la energía mecánica específica o reducida (por unidad de masa) de la partícula en el problema unidimensional equivalente. El primer término corresponde a la energía cinética y el potencial efectivo queda definido como

$$\boxed{V_{ef} = \frac{l_z^2}{2m^2r^2\sin^2\alpha} + gr\cos\alpha} \tag{6}$$

Para probar que es posible una órbita circular, basta con probar que el potencial efectivo tiene algún extremo, ya que como la energía del sistema se conserva, bastaría con elegir las condiciones iniciales adecuadas para que $E = V_{extremo}$. Para ello, alcanza con probar que existe un $r > 0$ tal que $\partial V_{ef}/\partial r = 0$:

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial r} = -\frac{l_z^2}{m^2r^3\sin^2\alpha} + g\cos\alpha = 0$$
$$\frac{l_z^2}{m^2r^3\sin^2\alpha} = g\cos\alpha$$
$$r = \left(\frac{l_z^2}{m^2g\sin^2\alpha\cos\alpha}\right)^{1/3}$$

Se puede ver que la expresión del paréntesis es siempre positiva, ya que involucra cuadrados, la constante de gravedad y el $\cos\alpha$, que por definición del problema debe mantenerse positivo, ya que el ángulo α debe estar entre 0 y 90 grados (sino dejaría de ser un cono). De esta manera queda probado que eligiendo condiciones iniciales adecuadas siempre se puede obtener un movimiento circular. Para encontrar la velocidad de las órbitas circulares con $r_c = cte$, debemos imponer la condición $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ en la ecuación 1, obteniendo

$$-r_c\sin^2\alpha\ \dot{\phi}^2 + g\cos\alpha = 0$$
$$\boxed{\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{r_c\sin^2\alpha}}}$$

D. Pequeñas perturbaciones de la órbita circular

Si la órbita difiere de la circular en una cantidad $\epsilon \ll r_c$ entonces podemos hacer un desarrollo de Taylor del potencial efectivo alrededor de $r = r_c + \epsilon$:

$$V_{ef}(r) \approx V_{ef}(r_c) + \left.\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}\right|_{r_c}(r - r_c) + \left.\frac{\partial^2 V_{ef}(r)}{\partial r^2}\right|_{r_c}\frac{(r-r_c)^2}{2} \tag{7}$$

El término lineal se anula porque V_{ef} alcanza un extremo en r_c. Manipulando la ecuación de E-L para r, se puede obtener que

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}$$

Reemplazando $\ddot{r} = \ddot{\epsilon}$ en esta ecuación y derivando en este caso la expansión de Taylor de la ecuación 7 se tiene que

$$m\ddot{\epsilon} \approx -\left.\frac{\partial^2 V_{ef}(r)}{\partial r^2}\right|_{r_c}\epsilon$$

que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia angular

$$\omega_r^2 = \left.\frac{\partial^2 V_{ef}(r)}{\partial r^2}\right|_{r_c} = \frac{3l_z^2}{m^2r_c^4\sin^2\alpha}$$

Para obtener una expresión más elegante, se puede usar que

$$l_z^2 = (mr_c^2\sin^2\alpha\dot{\phi})^2$$
$$l_z^2 = m^2r_c^4\sin^4\alpha\dot{\phi}^2$$
$$l_z^2 = m^2r_c^4\sin^4\alpha\frac{g\cos\alpha}{r_c\sin^2\alpha}$$
$$l_z^2 = m^2r_c^3\sin^2\alpha g\cos\alpha$$

y reemplazar esto en la ecuación anterior, obteniendo

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\frac{3g\cos\alpha}{r_c}}}$$

Comparando esta frecuencia con la frecuencia de revolución en la órbita circular, se obtiene:

$$\frac{\omega_r}{\dot{\phi}} = \sqrt{\frac{3g\cos\alpha}{r_c}\frac{r_c\sin^2\alpha}{g\cos\alpha}} = \sqrt{3}\sin\alpha$$

Esta relación es independiente de r_c. Se cumple que cuando $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$, ambas frecuencias son iguales, es decir que luego de un período de revolución, la partícula vuelve al mismo lugar y realiza un movimiento periódico. Los períodos de revolución azimutal y oscilación radial son $\tau_\phi = 2\pi/\dot{\phi}$ y $\tau_\phi = 2\pi/\omega_r$, respectivamente.