Ejercicio7

Hernan Simonelli y Lautaro Mundel

Agosto 2021

Enunciado: Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre una superficie cónica definida por $\theta = \alpha$, donde θ es el ángulo polar de las coordenadas esféricas.

Inciso A) Como el enunciado nos plantea que el ángulo θ es constante podemos proponer como coordenadas generalizadas r y φ siendo estas el radio desde el origen y el ángulo azimutal respectivamente.

En este caso podemos escribir la velocidad como:

$$\bar{v} = (\dot{r}\hat{r}, rsen(\alpha)\dot{\varphi}\hat{\varphi})$$

La energía cinética se escribe en términos de $\bar{v}^2$:

$$\bar{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 sen^2(\alpha)\dot{\varphi}^2$$

Ahora podemos escribir a la energía cinética como:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 sen^2(\alpha)\dot{\varphi}^2)$$

Por otro lado la energía potencial vendrá dada solo por la fuerza gravitatoria:

$$V = mgcos(\alpha)r$$

Halladas T y V obtenemos el lagrangiano de la siguiente manera $L = T - V$

$$L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2 sen^2(\alpha)\dot{\varphi}^2 - mgcos(\alpha)r$$

Las ecuaciones de movimiento de la partícula surgen de resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = \frac{\partial L}{\partial q}$ siendo q cada coordenada generalizada. Es decir, tendremos que resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange tanto para r como para φ.

Para r)

$$m\ddot{r} = mrsen^2(\alpha)\dot{\varphi}^2 - mgcos(\alpha)$$

Y simplificando las masas obtenemos

$$\boxed{\ddot{r} = rsen^2(\alpha)\dot{\varphi}^2 - gcos(\alpha)}$$

Para φ)

$$\frac{d}{dt}(mr^2sen^2(\alpha)\dot{\varphi}) = 0$$

como la derivada con respecto al tiempo es 0 entonces el argumento debe ser constante en el tiempo (φ es una coordenada cíclica). A esa constante la llamaremos l

De aquí se obtiene una relación para l que nos será útil más adelante

$$\boxed{l = mr^2sen^2(\alpha)\dot{\varphi}}$$

Podemos usar ésta misma relación para obtener $\dot{\varphi}$ simplemente despejando.

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2sen^2(\alpha)}}$$

Inciso B) Nos dan condiciones iniciales $r(0) = a, \dot{r}(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \frac{4\sqrt{3}g}{a}, \alpha = 30 \rightarrow sen^2(30) = \frac{1}{4}, cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Y nos piden hallar el maximo y minimo de r.

Sabemos que l debe ser contante para todo tiempo entonces evaluamos l en las C.I y lo elevamos al cuadrado.

$$l^2 = \frac{\sqrt{3}gm^2a^3}{4}$$

La ecuación para $\dot{\varphi}^2$ queda expresada como:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\sqrt{3}ga^3}{r^4}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial para r

$$\ddot{r} = \frac{\sqrt{3}ga^3}{r^3} - \frac{\sqrt{3}g}{2}$$

Pasando todo al lado izquierdo vemos que $\ddot{r} - \frac{\sqrt{3}ga^3}{r^3} + \frac{\sqrt{3}g}{2} = 0$ puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt}(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\sqrt{3}ga^3}{2r^2} + \frac{\sqrt{3}gr}{2}) = 0 \rightarrow \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\sqrt{3}ga^3}{2r^2} + \frac{\sqrt{3}gr}{2} = E$$

Siendo E la energía mecánica del sistema y como su derivada es 0 entonces podemos decir que E es constante para todo tiempo. Reemplazando con las condiciones iniciales obtenemos E_0

$$E_0 = \frac{\sqrt{3}ga^3}{2a^2} + \frac{\sqrt{3}ga}{2} = \sqrt{3}ga$$

$$\frac{\sqrt{3}ga^3}{2r^2} + \frac{\sqrt{3}gr}{2} = \sqrt{3}ga$$

Que se puede simplificar a:

$$r^3 - 2ar^2 + a^3 = 0$$

Ahora el problema de encontrar r_{max} y r_{min} se reduce a encontrar las raices de ésta ecuación, cosa que podemos hacer con un rapido codigo en Sympy.

```
[ ] r, a=symbols("r a")
    y=r**3-2*a*r**2+a**3
    solve(y,r)
```

$$\left[a,\ \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{5}a}{2},\ -\frac{\sqrt{5}a}{2} + \frac{a}{2}\right]$$

Código de Python usado para calcular las raíces

Las raíces son $r = a, r = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}, r = \frac{a(1-\sqrt{5})}{2}$ como ésta última es negativa la descarto por no ser una magnitud física real.

Como $\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} > a$ entonces $r_{max} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}, r_{min} = a$

Inciso C) En este inciso nos piden hallar el potencial efectivo unidimensional equivalente, mostrar que existen órbitas circulares y calcular la velocidad en tales órbitas.

Si volvemos a la ecuación para la energía mecánica. $\frac{\dot{r}}{2}^2 + \frac{\sqrt{3}ga^3}{2r^2} + \frac{\sqrt{3}gr}{2} = E$ Llamamos potencial efectivo

$$V_{eff} = \frac{\sqrt{3}ga^3}{2r^2} + \frac{\sqrt{3}gr}{2}$$

Este potencial ya está escrito como un problema unidimensional en r. Para definir la existencia de órbitas circulares podemos graficar V_{eff} y buscar minimos.

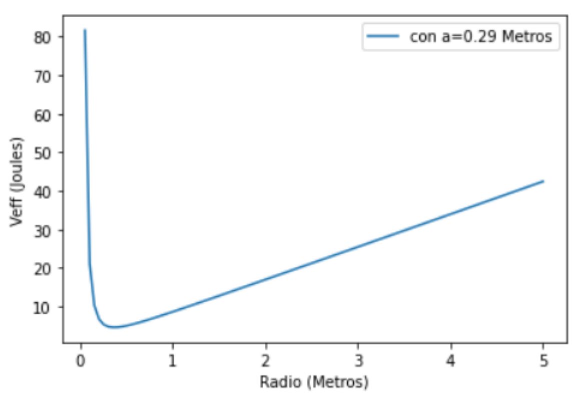

Gráfico del potencial efectivo tomando $g = 9,8$ $m = 1$ y $a = 0,29$

Vemos que el potencial tiene un mínimo lo que nos alcanza para afirmar la existencia de una órbita circular.

El radio de la órbita circular cumple que $\frac{dV_{eff}}{dr}|_{r_c} = 0$

$$\frac{dV_{eff}}{dr}|_{r_c} = \frac{-\sqrt{3}ga^3}{r^3} + \frac{\sqrt{3}g}{2} = 0$$

Si despejamos r_c nos queda:

$$\boxed{r_c = \sqrt[3]{2}a}$$

Una vez hallado el radio de la órbita circular su velocidad vendra dada por $\dot{\varphi}$ podemos usar la ecuación reemplazando r por r_c

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{m^2 r_c^4 sen^4(\alpha)} = \frac{4\sqrt{3}ga^3}{r_c^4}$$

Simplificando a^3 con $r_c^3 = 2a^3$ nos queda

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{cos(\alpha)g}{r_c sen^2(\alpha)} \rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{cos(\alpha)g}{r_c sen^2(\alpha)}}}$$

Inciso D) Nos piden realizar el cálculo para pequeñas oscilaciones alrededor de una órbita circular. Para ello voy a hacer una expansión de taylor del potencial efectivo centrado en el radio de la orbita circular r_c

$$V_{eff} \approx V_{eff}|_{r_c} + (r - r_c)\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}|_{r_c} + \frac{(r - r_c)^2}{2}\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2}|_{r_c}$$

El termino $\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}|_{r_c}$ es 0 porque el radio circular es un mínimo del potencial efectivo. El potencial efectivo evaluado en r_c sale de reemplazar el valor del radio en la ecuación original para el potencial:

$$\frac{\sqrt{3}gma^3}{2r_c^2} + \frac{\sqrt{3}gr_c}{2}$$

Resta calcular $\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2}$:

$$\frac{3l^2}{mr_c^4 sen^2(\alpha)}$$

Podemos reemplazar l^2 con las condiciones iniciales si suponemos que la órbita sigue siendo circular aun habiendo pequeñas oscilaciones. Nos queda entonces que el potencial efectivo V_{eff} se puede aproximar por:

$$V_{eff} \approx \frac{\sqrt{3}gma^3}{2r_c^2} + \frac{\sqrt{3}gr_c}{2} + \frac{(r - r_c)^2}{2}\frac{3l^2}{mr_c^4 sen^2(\alpha)}$$

Vamos a hacer un cambio de variables y llamar $\eta = (r - r_c)$, como ahora el V_{eff} depende de η puedo usar Newton. $-\frac{\partial V_{eff}}{\partial \eta} = F_\eta = m\ddot{\eta}$.

Esto me define una EDO para η:

$$\ddot{\eta} = -\frac{3a^3 g\sqrt{3}}{r_c^4}\eta \rightarrow \boxed{\ddot{\eta} + \frac{3a^3 g\sqrt{3}}{r_c^4}\eta = 0}$$

Ésta es la ecuación del oscilador armónico y sabemos que su frecuencia vendrá dada por $\omega = \sqrt{\frac{3a^3 g\sqrt{3}}{r_c^4}}$. Simplificando la expresión usando: $r_c^3 = 2a^3$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = cos(\alpha)$ entonces la frecuencia queda escrita como:

$$\omega = \sqrt{\frac{3gcos(\alpha)}{r_c}}$$

Volviendo al inciso anterior podemos pensar a $\dot{\varphi}$ como la frecuencia orbital y a ω como la frecuencia del movimiento radial. Observando la expresión para

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{cos(\alpha)g}{r_c sen^2(\alpha)}}$$

Si $sen(\alpha)^2 = \frac{1}{3}$ entonces la partícula volverá a su posición original tras dar una vuelta, más aún, si el cociente entre $\frac{\omega}{\dot{\varphi}}$ es un número racional, el sistema tardará un tiempo T en volver a su estado inicial.

$$\frac{\omega}{\dot{\varphi}} = \frac{t_w}{t_\varphi} = \frac{p}{q} \rightarrow T = qt_w = pt_\varphi$$

Simulaciones: https://glowscript.org//user/hersimonelli/folder/MyPrograms/