Mecánica Clásica - Entrega 2.

Gastón Carrera - Rosario Vidaurreta

A)

Variacionales

Defino el lagrangiano

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qB_0 x\dot{y} \tag{1}$$

Por el principio de Hamilton, se puede definir la acción como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}, q, t)dt \tag{2}$$

Donde por condición de mínima acción se tiene $\delta S = 0$.

Se proponen como trayectorias que extreman a la acción:

- $x(t) = asen(\omega t) + c$
- $y(t) = bcos(\omega t) + d$

Se tienen como condiciones iniciales y finales:

- $x(t = 0) = x_0$
- $y(t = 0) = y_0$
- $x(t = \frac{\pi}{\omega}) = x_0$
- $y(t = \frac{\pi}{\omega}) = x_0 + 2R$

Usando las trayectorias propuestas en las condiciones iniclaes se pueden encontrar las siguientes relaciones:

- $c = x_0$
- $b = -R$
- $d = y_0 + R$

De esta forma podemos reescribir el lagrangiano como:

$$L = \frac{m}{2}\omega^2 a^2 cos^2(\omega t) + \left[\frac{m}{2}\omega^2 R^2 + qB_0 R\omega a\right] sen^2(\omega t) + x_0 RqB_0\omega sen(\omega t) \tag{3}$$

A partir de la definición 2, osea integrando y tomando $t_1 = 0$ y $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$ como indican las condiicones iniclaes, llegamos a que la acción sólo depende del parámetro a:

$$S(a) = \frac{m}{4}\omega a^2\pi + \frac{m}{4}\omega R^2\pi + qB_0 R\frac{\pi}{2}a - x_0 RqB_0 \tag{4}$$

Como lo que se busca es extremar la acción, por condición de extremo se tiene:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{m}{2}\omega a\pi + qB_0 R\frac{\pi}{2}a = 0 \longrightarrow a = -R \qquad con \quad \omega = \frac{qB_0}{m} \tag{5}$$

B)
La solución corresponde a una trayectoria circular.
A partir del lagrangiano se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB_0\dot{y} \\ m\dot{y} + qB_0 x &= P_y \end{aligned} \tag{6}$$

La segunda ecuación corresponde a que la coordenada y es una coordenada cíclica, y por lo tanto se conserva el momento conjugado P_y.

De la segunda ecuación se puede despejar $\dot{y}$ y reemplazar en la primera ecuación, y se tiene:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\omega}{m}P_y \tag{7}$$

La ecuación 7 es la ecuación característica del oscilador. Proponiendo una solución del tipo $x(t) = asen(\omega t) + c$ y tomando que la condición inicial es $x(t=0) = x_0$ se obtiene:

$$c = \frac{P_y}{B_0 q} = x_0 \longrightarrow P_y = x_0 B_0 q \tag{8}$$

Reemplazando el valor encontrado de P_y en la segunda ecuación del sistema 6 e integrando $\dot{y}$ se tiene $y(t) = acos(\omega t) + d$. Usando las condiciones iniciales $y(t=0) = y_0$ y $y(t = \frac{\pi}{\omega}) = y_0 + 2R$ puede despejarse $a = -R$ y $d = y_0 + R$.

Además podemos hacer uso de la ec. 6 obteniendo que

$$P_x = m\dot{x} - qB_0 y = cte \quad \longrightarrow \quad d = -\frac{P_x}{m\omega} = y_0 + R$$

De esta forma, reemplazando lo obtenido en las trayectorias propuestas se obtuvo la misma solución que en el inciso anterior.

$$\begin{aligned} x(t) &= -Rsen(\omega t) + \frac{P_y}{m\omega} \\ y(t) &= -Rcos(\omega t) - \frac{P_x}{m\omega} \end{aligned} \tag{9}$$

C)

Si tenemos nuevamente la situación del ejercicio anterior, de una particula en un campo uniforme $B_0\hat{z}$, pero empleando el *gauge simétrico* $\boldsymbol{A} = \frac{B_0}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$, el Lagrangiano tomaría la siguiente forma:

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB_0}{2}(\dot{y}x - \dot{x}y)$$

D)

Podemos verificar que la siguiente transformación de coordenadas 10 dejará invariante al Lagrangiano.

$$
\begin{aligned}
x' &= xcos(\theta) - ysen(\theta) \\
y' &= xsen(\theta) + ycos(\theta)
\end{aligned} \tag{10}
$$

Para probar esto planteamos el Lagrangiano en las nuevas coordenadas primadas y reemplazamos para ver como se relaciona con el anterior.

$$
\mathscr{L}' = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) + \frac{qB_0}{2}(\dot{y}'x' - \dot{x}'y') \tag{11}
$$

Si reemplazamos la Ec. 10 aquí, obtenemos:

$$
\mathscr{L}' = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB_0}{2}(\dot{y}x - \dot{x}y) \tag{12}
$$

Como se puede observar $\mathscr{L}' = \mathscr{L}$, lo que nos dice que:

$$
\delta\mathscr{L} = \mathscr{L}' - \mathscr{L} = 0 \tag{13}
$$

De la Ec. 13 se puede observar que el Lagrangiano no se ve alterado en su expresión por la transformación de coordenadas aplicada, es decir, esta es una transformación de simetría del lagrangiano.

E)

Ahora si tomamos una transformación infinitesimal como la de la Ec. 10, y haciendo un desarrollo a primer órden en ϵ, nos queda igual que el Lagrangiano orignial como en la Ec. 12.

Esto, utilizando el Teorema de Noether, nos dice que existe una función G que cumple lo siguiente:

$$
\delta\mathscr{L} = 0 = \epsilon\frac{dG}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad G = cte \tag{14}
$$

Además este mismo teorema nos indica que existe una magnitud conservada al aplicar esta transformación de la Ec. 10, y se obtiene por la siguiente relación:

$$
\sum_k \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k - \epsilon G = cte \tag{15}
$$

Donde $\delta q_k = q_k' - q_k$. Entonces derivamos el Lagrangiano para obtener todos los terminos de la ecuación 15.

$$
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} - \frac{qB_0}{2}y \qquad \delta x = -\epsilon y
$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{qB_0}{2}x \qquad \delta y = \epsilon x$$

Por ende, reemplazando estos términos en 15, nos queda:

$$m\epsilon(\dot{y}x - \dot{x}y) + \epsilon\frac{qB_0}{2}(x^2 + y^2) - \epsilon G = cte \tag{16}$$

Aquí podemos dividir todo por ϵ, definir a G por simplicidad $G = 0$, y reemplazar los valores que habíamos obtenido en 9.

$$mR^2\omega - \frac{1}{qB_0}(P_x^2 + P_y^2) = cte \tag{17}$$

Nos queda un término que es el Momento Angular en el eje Z (L_z), y otro término con las mismas unidades que se relaciona con el campo magnetico y el momento canónico conjugado al cuadrado.

De este modo hemos hallado una magnitud que se conserva, y que, así como la energía mecánica relaciona T y V de modo que si una aumenta, la otra disminuye, con estos términos ocurrirá algo similar.

F)

Podemos para este mismo problema, plantear un tercer gauge, también llamado Gauge de Landau, que tiene una forma similar al primero, $\boldsymbol{A} = -B_0 y\hat{x}$. Usando esto el lagrangiano tomaría la siguiente forma.

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - qB_0\dot{x}y \tag{18}$$

A este lagrangiano podemos aplicarle la misma transformación de la Ec. (de forma infinitesimal a primer orden en ϵ) obteniendo:

$$\mathscr{L}' = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - qB_0\dot{x}y + \epsilon qB_0(\dot{y}x - \dot{x}y) \tag{19}$$

Como se puede observar, al no usar el gauge simétrico, se obtiene una diferencia entre $\mathscr{L}'$ y $\mathscr{L}$, lo que nos da un valor no constante para G.

$$\epsilon\frac{dG}{dt} = \epsilon qB_0(\dot{y}y - \dot{x}x) \quad \longrightarrow \quad G = qB_0 2(y^2 - x^2) \tag{20}$$

Ahora, podemos observar cual es la magnitud conservada para esta transformación, haciendo nuevamente los reemplazos para este caso en la Ec. 15.

$$\begin{gathered}(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}})\delta x = (m\dot{x} - qB_0 y)(-\epsilon y) \\ \\ (\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}})(\delta y) = (m\dot{y})(\epsilon x)\end{gathered} \tag{21}$$

Reemplazando 21 en la Ec. 15, y dividiendo todo por ϵ obtenemos:

$$m(\dot{y}x - \dot{x}y) + \frac{qB_0}{2}(x^2 + y^2) = cte$$

$$mR^2\omega - \frac{1}{qB_0}(P_x^2 + P_y^2) = cte \tag{22}$$

Comparando la Ec. 17 con la 22 podemos ver que la magnitud conservada en ambos casos es la misma, independientemente del gauge utilizado.