Entrega 2

Hernán Simonelli y Lautaro Mundel

Septiembre 2021

Enunciado: Una partícula de masa m y carga q que se mueve en el plano x-y y con velocidad paralela al eje $\hat{x}$, e ingresa a una región $x \geq x_0$ sujeta a un campo magnético $B = B_0\hat{z}$. Se realiza una medición y se establece que la partícula va del punto (x_0, y_0) a (x_0, y_0+2R) en un tiempo $\delta t = \frac{\pi}{\omega}$, siendo $\omega = \frac{qB_0}{m}$.

1. Variacionales

Nos plantean una familia de funciones tanto para x como para y:

$$x(t) = asen(\omega t) + c$$

$$y(t) = bcos(\omega t) + d$$

Y nos proponen usar el principio variacional de Hamilton. Este principio dice que la acción I no cambia a primer orden si la función que integramos es el Lagrangiano de nuestro sistema

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}\, dt$$

Vamos a calcular el Lagrangiano para este sistema. $\mathcal{L} = T - V$, la energía cinética de una partícula libre en el plano x-y es:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

El potencial de un campo magnético viene dado por la expresión:

$$V = q\phi - q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

Usando el Gauge de Landau: $A = B_0 x\hat{y}$ y $\mathbf{v} = (\dot{x}\hat{x}, \dot{y}\hat{y}, 0)$ el potencial nos queda

$$V = -qB_0 x\dot{y}$$

Juntando todo obtenemos el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qB_0 x\dot{y}$$

Ahora derivamos las funciones que nos dieron para x e y:

$$\dot{x}(t) = a\omega cos(\omega t)$$

$$\dot{y}(t) = -b\omega sen(\omega t)$$

Y reemplazamos en el Lagrangiano:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{m}{2}(a^2\omega^2 cos(\omega t)^2 + b^2\omega^2 sen(\omega t)^2) - qB_0(asen(\omega t) + c)b\omega sen(\omega t)\, dt$$

Luego de integrar llegamos a la expresión de la acción en términos de (a, b, c, w, B_0)

$$I = \frac{\pi(b^2 + a^2)mw}{2} - qbB_0(2c + \frac{\pi a}{2})$$

Ya tenemos una expresión para la acción, ahora vamos a aplicar condiciones iniciales y finales a nuestras funciones de prueba para determinar algunos de sus parámetros.

C.I: $(x(0) = x_0 = c)$, $(y(0) = y_0 = b + d)$ y $(y(\frac{\pi}{\omega}) = y_0 + 2R = -b + d)$ despejando de esta última condición llegamos a: $(b = -R)$ y $(d = y_0 + R)$. Solo nos falta conocer a. Este parámetro lo podemos hallar extremando la funcional acción I

$$\frac{\partial I}{\partial a} = 0 \rightarrow \frac{m\pi\omega a}{2} - \frac{\pi qbB_0}{2} = 0$$

Despejamos a y usamos $\omega = \frac{qB_0}{m}$ para llegar a $a = b$. Entonces las funciones que describen la trayectoria de la partícula son:

$$x(t) = -Rsen(\omega t) + x_0$$

$$y(t) = -Rcos(\omega t) + y_0 + R$$

La partícula describe una trayectoria semicircular de radio R y centro $(x_0, y_0{+}R)$

Si lo comparamos con la solución exacta (ejercicio 19) :

$$x(t) = Rcos(\omega t+) + \bar{x}$$

$$y(t) = -Rsen(\omega t+) + \bar{y}$$

Aplicando las mismas condiciones iniciales a este problema obtenemos: $(\bar{x} = x_0)$, $(y = y_0 + R)$ y $\phi = \frac{\pi}{2}$. Reemplazando estos datos en las soluciones exactas estas resultan similares a las obtenidas usando principio variacional.

2. Simetrías 1

A) Ahora queremos escribir el Lagrangiano pero con el gauge simétrico:

$$A = \frac{B_0}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$$

La parte cinética queda igual mientras que el potencial ahora se escribe como:

$$V = -q(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = -q\frac{B_0}{2}(-y\dot{x} + x\dot{y})$$

El lagrangiano termina quedando:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q\frac{B_0}{2}(-y\dot{x} + x\dot{y})}$$

B) Queremos ver si la siguiente transformación de coordenadas es una transformación simétrica del Lagrangiano. Es decir, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$.

$$\dot{x}' = \dot{x}cos(\theta) - \dot{y}sen(\theta)$$

$$\dot{y}' = \dot{x}sen(\theta) + \dot{y}cos(\theta)$$

Para ver que el Lagrangiano no cambia basta con ver si la energía cinética y el potencial no se modifican. Entonces reemplazamos x' e y' en T y V.

$$T' = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2)$$

$$T' = \frac{m}{2}(\dot{x}^2cos^2(\theta) + \dot{y}^2sen^2(\theta) - 2\dot{x}\dot{y}cos(\theta)sen(\theta) + \dot{x}^2sen^2(\theta) + \dot{y}^2cos^2(\theta) + 2\dot{x}\dot{y}cos(\theta)sen(\theta))$$

Simplificando llegamos a:

$$T' = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \rightarrow T' = T$$

Para el potencial se tiene:

$$V' = \frac{qB_0}{2}(-y'\dot{x}' + \dot{y}'x')$$

Desarrollando y simplificando términos llegamos a $V' = V$. Como la energía cinética y el potencial no sufren cambios entonces podemos asegurar que $\delta\mathcal{L} = 0$.

C) En este inciso consideremos una transformación infinitesimal en $\theta \rightarrow \theta = \epsilon$, sustituimos θ en la transformada anterior y hacemos una expansión de Taylor a primer orden.

$$\left.\begin{array}{l} x' = xcos(\epsilon) - ysen(\epsilon) \\ y' = xsen(\epsilon) + ycos(\epsilon) \end{array}\right\} \rightarrow \quad \begin{array}{c} x' = x - y\epsilon \\ y' = x\epsilon + y \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \delta x = -y\epsilon \\ \delta y = x\epsilon \end{array}$$

Usaremos el teorema de Nöether para hallar la magnitud conservada tras la transformación de coordenadas $\sum_{i=1}^{N} p_i \delta q_i - F = c$. Donde F es una función que no depende de t y c una constante. Los p_i los calculamos como: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - q\tfrac{B_0}{2}y \\ p_y &= \tfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + q\tfrac{B_0}{2}x \end{aligned}\right\}$$

Para hallar la magnitud conservada solo nos queda juntar todo en el teorema de Nöether:

$$p_x\delta x + p_y \delta y = -y\epsilon(m\dot{x} - q\frac{B_0}{2}y) + x\epsilon(m\dot{y} + q\frac{B_0}{2}x) = L$$

Como ϵ es una constante la sacamos como factor común y dividimos por ϵ, del lado derecho nos quedará una constante que llamaremos L.

$$-y(m\dot{x} - q\frac{B_0}{2}y) + x(m\dot{y} + q\frac{B_0}{2}x) = L$$

En cada término podemos ver que se compone tanto de una parte mecánica $m\dot{q}_i$ como de una parte que viene del campo magnético $q\frac{B_0}{2}q_i$. Distribuyendo y agrupando términos llegamos a:

$$L = \underbrace{m(\dot{y}x - \dot{x}y)}_{Parte.Mecanica} + \underbrace{q\frac{B_0}{2}(x^2 + y^2)}_{Parte.Magnetica}$$

3. Simetrías 2

A) Nuevamente queremos calcular el Lagrangiano del sistema pero usando el gauge de Landau en $\hat{x}$: $A = -B_0 y\hat{x}$.
Si reemplazamos este valor de A en el potencial obtenemos:

$$V = qB_0 y\dot{x}$$

La energía cinética no se ve modificada por lo tanto el Lagrangiano se puede escribir como:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - qB_0 y\dot{x}}$$

B) Queremos verificar si la siguiente transformación de coordenadas infinitesimales es una transformación de simetría generalizada del Lagrangiano.

$$x' = x - y\epsilon$$
$$y' = x\epsilon + y$$

Para ello vamos a calcular $L'(q'_i, \dot{q}'_i, t)$ y luego reemplazar las q'_i por su transformación.

$$L' = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) - qB_0 y'\dot{x}' = \frac{m}{2}((\dot{x} - \dot{y}\epsilon)^2 + (\dot{y} + \dot{x}\epsilon)^2) - qB_0(y + x\epsilon)(\dot{x} - \dot{y}\epsilon)$$

Desarrollando los términos cuadráticos y luego agrupando se obtiene:

$$\mathcal{L}' = \underbrace{\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - qB_0 y\dot{x}}_{\mathcal{L}} - \underbrace{\epsilon qB_0(x\dot{x} - y\dot{y})}_{\epsilon\frac{dF}{dt}} + \underbrace{\epsilon^2(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qB_0 x\dot{y})}_{O(\epsilon^2)}$$

Ahora el teorema general de Nöether nos dice que si tenemos un lagrangiano que se puede escribir como: $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \epsilon\frac{dF}{dt} + O(\epsilon^2)$ entonces existe una constante, llamémosla C, tal que $\sum_i^n p_i K_i - h\Theta + F = C$.
Como el lagrangiano no depende del tiempo entonces $\Theta = 0$.
Los K_j se obtienen de ver la transformación de coordenadas infinitesimales impuesta $q_i = q'_i + \epsilon K_i$ y los $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$.

$$p_x(-y) + p_y(x) + F = C$$

Buscamos los p_x y p_y:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - qB_0 y$$

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

La obtención de los K_i es trivial $K_x = -y$ y $K_y = x$.
Por último la función F se obtiene integrando $\frac{dF}{dt}$.

$$\int qB_0(x\dot{x} - y\dot{y})\, dt$$

Esta integral es inmediata sabiendo que $\frac{d}{dt}\frac{q^2}{2} = q\dot{q}$ entonces F resulta:

$$\int qB_0(x\dot{x} - y\dot{y})\, dt = \frac{qB_0}{2}(x^2 - y^2)$$

Juntando todo obtenemos el valor de C

$$C = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{qB_0}{2}(x^2 + y^2)$$

Podemos ver que la cantidad conservada L del ejercicio anterior y C son idénticas a pesar de haber cambiado el gauge del potencial.

$$\textit{gauge de Landau} \rightarrow \boxed{C = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{qB_0}{2}(x^2 + y^2)}$$

$$\textit{gauge simetrico} \rightarrow \boxed{L = m(\dot{y}x - \dot{x}y) + q\frac{B_0}{2}(x^2 + y^2)}$$

Pero ¿tiene sentido que sean iguales?, pensemos lo que estamos haciendo. En ambos problemas efectuamos la misma transformación infinitesimal. En el problema uno la obtenemos por Taylor a primer orden mientras que en el problema dos, es dato.
Otra de las cosas que cambiamos es el potencial vector A. Pero el cambio se hace usando las libertades del gauge. Estas libertades nos aseguran que el campo magnético resultante sea igual sin importar qué gauge estemos usando.

Recapitulando estamos ante la misma transformación infinitesimal y con el mismo campo magnético resultante. Por esta razón, la magnitud conservada es igual para ambos casos.