Ejercicio 3

Nicolás Gomez Brucks, Martín Galán.

nicolasbrooks6@hotmail.com, mng94@live.com.ar

Mecánica Clásica – Segundo cuatrimestre 2021 – Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA.

1. Inciso a)

1.1.

Siendo que el potencial es $V = V(r)$, es central, por lo que $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{\ell}$ (es constante) y además $\vec{r} \cdot \vec{\ell} = 0$, por lo que utilizaremos coordenadas polares ya que el movimiento es en un plano.

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{k}{r^2} \tag{1}$$

Vemos conservaciones y ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \ell = mr^2\dot{\phi} = cte. \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 + \frac{2k}{r^3} = m\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}) \tag{3}$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow h = cte$ y $h = E$ ya que $T(\lambda\dot{q}) = \lambda^2 T(\dot{q})$ y $V \neq V(\dot{q})$.
Entonces escribimos la energía:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{k}{r^2} \tag{4}$$

Introduciendo la conservación de ℓ:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2}) + \frac{k}{r^2} \tag{5}$$

$$\Rightarrow V_{ef}(r) = \frac{\ell^2 + 2mk}{2mr^2} \tag{6}$$

Del cual se observa a simple vista que posee dos asíntotas en $r \to \infty$ y en $r \to 0$ y que no tiene puntos de equilibrio (es una función monótona).

Para obtener la trayectoria vuelvo a la ecuación de la energía:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r} + V_{ef}(r) \tag{7}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \sqrt{(E - V_{ef}(r))\frac{2}{m}} \tag{8}$$

Sabiendo que:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi}\frac{\ell}{mr^2} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \phi = \int \frac{\ell.dr}{\sqrt{2m[E - V_{ef}(r)]}r^2} \tag{10}$$

Sustituyendo

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow du = -\frac{dr}{r^2} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \phi = -\int \frac{\ell du}{\sqrt{2mE - (\ell^2 + 2mk)u^2}} \tag{12}$$

$$\phi = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 2mk}} arccos(\sqrt{\frac{\ell^2 + 2mk}{2mE}}\frac{1}{r}) + \phi' \tag{13}$$

$$r(\phi) = \sqrt{\frac{\ell^2 + 2mk}{2mE}} cos^{-1}(\frac{\sqrt{\ell^2 + 2mk}}{\ell}\Delta\phi) \tag{14}$$

Si $k = 0$:

$$r(\phi) = \sqrt{\frac{\ell^2}{2mE}} cos^{-1}(\Delta\phi)$$

Por otra parte tenemos la condición:

$$r(\phi = 0) = r_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2mE}} \Rightarrow \phi' = 0 \tag{16}$$

Entonces la ecuación de la trayectoria es:

$$r(\phi) = \frac{r_0}{cos(\phi)} \tag{17}$$

La trayectoria es una línea recta que corta al eje x en el punto $x = r_0$, lo cual es esperable para un cuerpo libre de campos externos.

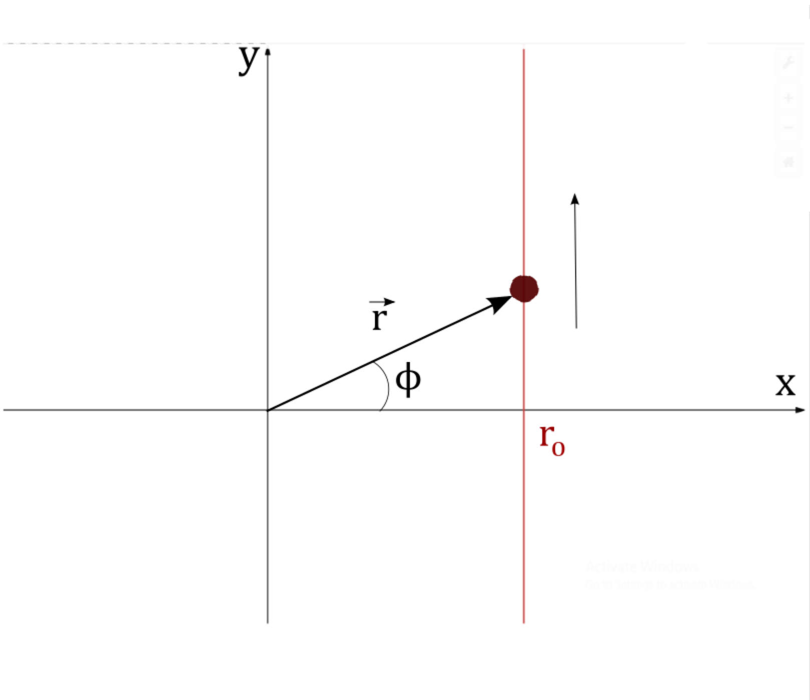

Figura 1: Gráfico de la trayectoria para $k = 0$

Si $k > 0$, puedo renombrar el momento angular como:

$$\tilde{\ell}^2 = \ell^2 + 2mk \Rightarrow \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2} = \frac{\tilde{\ell}^2}{2mr^2} \tag{18}$$

Reescribimos el ángulo ϕ como:

$$\tilde{\phi} = \frac{\tilde{\ell}}{\ell}\Delta\phi \tag{19}$$

y

$$r(\tilde{\phi}) = cos(\tilde{\phi})^{-1}\frac{\tilde{\ell}}{\sqrt{2mE}} \tag{20}$$

Las asíntotas se encuentran en $\tilde{\phi} = \pm\frac{\pi}{2}$.

1.2.

Escribimos la ecuación de Binet:

$$\frac{\partial^2 u(\phi)}{\partial\phi^2} + u(\phi) + \frac{\mu}{\ell^2 u(\phi)^2} f(\frac{1}{u}(\phi)) = 0 \tag{21}$$

$$V = \frac{k}{r^2} \Rightarrow f(\frac{1}{u}) = 2ku^3 \tag{22}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + u(1 + \frac{2km}{\ell^2}) = 0 \tag{23}$$

Cuya solución es:

$$u(\phi) = Acos(\omega\phi + \phi_0) \tag{24}$$

Los puntos de retorno vienen dados por:

$$\frac{du}{d\phi} = -Asen(\omega\phi + \phi_0)\omega = 0 \tag{25}$$

$$\Rightarrow \omega\phi + \phi_0 = 0 \Rightarrow \phi = -\frac{\phi_0}{\omega} \tag{26}$$

$$\Rightarrow u(-\frac{\phi}{\omega}) = A \tag{27}$$

Introduciendo esto en la ecuación de la energía:

$$E = (\frac{\ell^2}{2m} + k)u^2 \tag{28}$$

Con $\dot{r} = 0$ ya que es un punto de retorno.

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2 + 2mk}} \tag{29}$$

$$r(\phi) = \sqrt{\frac{\ell^2 + 2mk}{2mE}} cos^{-1}(\sqrt{1 + \frac{2mk}{\ell^2}}\Delta\phi) \tag{30}$$

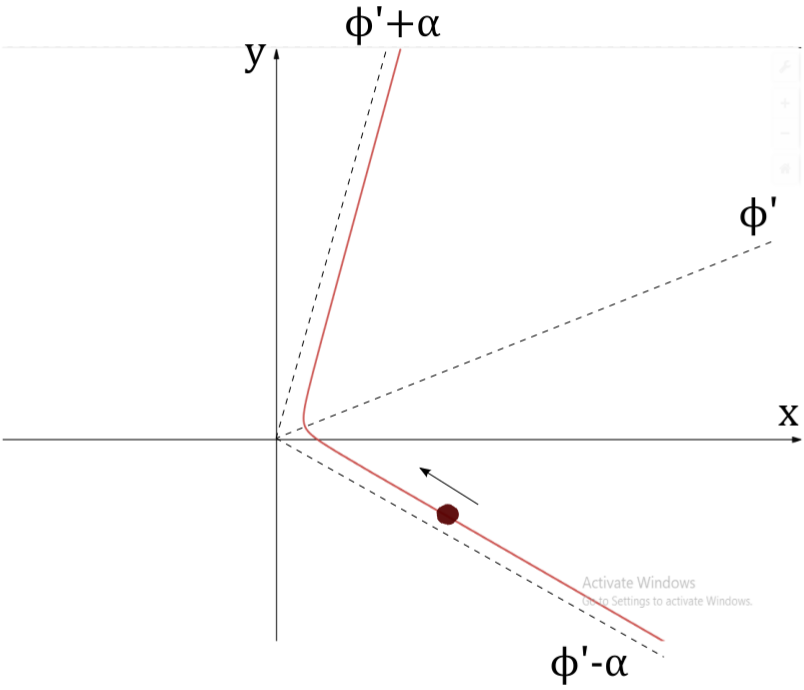

Figura 2: Gráfico de la trayectoria para $k > 0$

2. Inciso b)

Cuando $\ell^2 > -2mk > 0$ la trayectoria se hace más abierta, es decir, las asíntotas se separan más entre sí, pues en este caso las mismas vienen dadas por:

$$\Delta\phi = \pm\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 2mk}}\frac{\pi}{2} \tag{31}$$

y el termino $\ell^2 + 2mk$ es menor que en el caso anterior, resultando en una trayectoria mas abierta.

3. Inciso c)

En el caso $\ell^2 + 2mk < 0$ podemos reescribir la ecuación de Binet como:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} - \omega^2 u = 0 \tag{32}$$

Donde definimos:

$$\omega^2 = -\left(1 + \frac{2mk}{\ell^2}\right) \tag{33}$$

Las solución general a la EDO viene dada por:

$$u(\phi) = Acosh(\omega\phi + \alpha) \tag{34}$$

Los puntos de retorno vienen dados por:

$$\dot{r} = 0 \Longleftrightarrow \dot{u} = 0 \Longleftrightarrow A\omega senh(\omega\phi + \alpha) = 0 \Longleftrightarrow \phi = -\frac{\alpha}{\omega} \tag{35}$$

Para estos valores de ϕ se tiene que:

$$u(\phi = -\frac{\alpha}{\omega}) = A = \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2 + 2mk}} \tag{36}$$

Por lo que la solución viene dada por:

$$r(\phi) = \sqrt{\frac{\ell^2 + 2mk}{2mE}} cosh^{-1}(\sqrt{1 + \frac{2mk}{\ell^2}} \Delta\phi) \tag{37}$$

Puesto que $\cosh(x) > 0 \; \forall \; x$, se tiene que la trayectoria no tiene asíntotas. Además podemos ver que $r \to 0$ cuando $\phi \to \infty$, por lo que la trayectoria es una espiral que tiende al origen cuando $t \to \infty$.

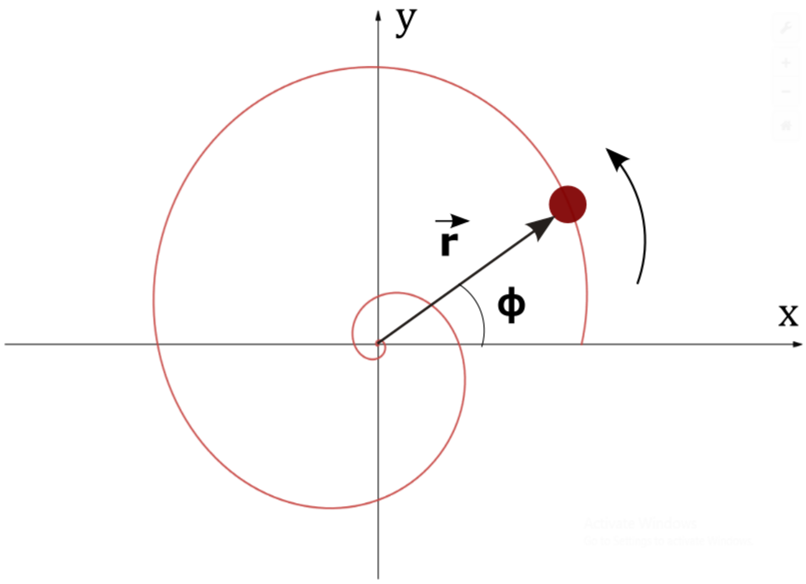

Figura 3: Gráfico de la trayectoria para $k < 0$

4. Inciso d)

Ya vimos que para el caso de un potencial repulsivo, las asíntotas vienen dadas por:

$$\tilde{\phi} = \pm\frac{\pi}{2} \iff \phi = \pm\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 2mk}}\frac{\pi}{2} + \phi' \tag{38}$$

Definamos $\alpha = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+2mk}}\frac{\pi}{2}$. Entonces, puesto que:

$$E = \frac{m}{2}v_\infty^2, \quad \ell = msv_\infty \tag{39}$$

podemos reescribir α como:

$$\alpha = \frac{\pi/2}{\sqrt{1 + \frac{k}{s^2E}}} \tag{40}$$

Por otra parte, el ángulo de desviación está dado por:

$$\chi = \pi - 2\alpha \Rightarrow \pi - \chi = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{k}{s^2E}}} \tag{41}$$

Despejando $s = s(\chi)$ nos queda:

$$s(\chi) = \sqrt{\frac{k}{E}\left[\frac{\pi^2}{\pi^2 - (\pi-\chi)^2} - 1\right]} \tag{42}$$

De este modo tenemos que:

$$d\sigma = \frac{s}{sen(\chi)}\left|\frac{ds}{d\chi}\right| d\Omega \tag{43}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \frac{k}{E}\frac{\pi^2(\pi-\chi)}{[\pi^2 - (\pi-\chi)^2]^2}\frac{1}{sen(\chi)} \tag{44}$$