Entrega 3

Hernan Simonelli y Lautaro Mundel

Septiembre 2021

Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de un potencial central $V(r) = k/r^2$.

1. Fuerzas centrales

A) Para el caso en que el potencial sea repulsivo y $E > 0$, interpretar el movimiento a partir del potencial efectivo y la conservación del momento angular. Obtener la trayectoria de dos maneras.

Que el potencial sea de tipo repulsivo quiere decir que $V \geq 0$ esto ocurre si y sólo si $k \geq 0$.
Empecemos escribiendo el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} \tag{1}$$

Haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange y de la conservación del momento angular (θ es cíclica) llegamos a la ecuación para la energía mecánica.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2}\right) &= 0 \\ E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2} & \qquad (2) \end{aligned}$$

Podemos identificar el $V_{eff} = \frac{l^2}{2m^2r^2} + \frac{k}{mr^2}$ y graficando obtenemos los posibles movimientos.

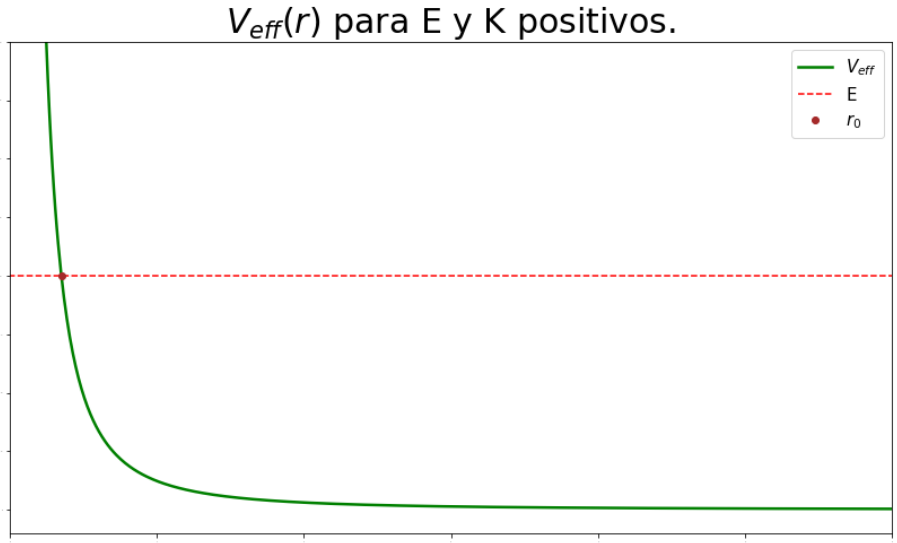

Figura 1: Potencial efectivo para $k > 0$.

Los parámetros fueron elegidos sin mayor criterio que cumplir lo mínimo necesario (por ejemplo, E>0). Por esta razón, y como solo apuntán a mostrar cualitativamente la forma de las funciones, tanto en este gráfico como en los posteriores, se optó por no mostrar valores numéricos, más allá de los que resulten indispensables.

Si analizamos la forma del potencial, vemos que para cualquier energía mayor que 0, tendremos un radio de mínimo acercamiento r_0 (esto se dará cuando $V_{eff} = E$). Como no hay otro punto de retorno, el movimiento será no ligado.

1) ¿Cúal es la trayectoria para $k = 0$? Escriba esta trayectoria en coordenadas polares tomando $\varphi = 0$ en el punto de retorno r_0 (considere que es paralela al eje y). Cuando $k > 0$ escriba la ecuacíon de la trayectoria usando el método del problema 3(a) (redefinir l y φ). Calcular las direcciones de las asíntotas, si las hubiere. Dibujar la trayectoria en el plano xy.

Si $k = 0$, entonces la energía mecánica es la de una partícula libre:

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2m^2r^2} \tag{3}$$

Queremos hallar la trayectoria, es decir, $r(\varphi)$. Para eso, despejamos $\dot{r}$ de la ecuación de la energía y, utilizando nuevamente la conservación del momento angular, hacemos el siguiente cambio de variables:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{l}{mr^2}$$

Despejamos φ, y ya estamos en condiciones de integrar.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm\frac{l}{m}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \tag{4}$$

Como puede verse, no definí límites de integración para la integral en r, esto es un abuso de notación para simplificar la escritura del resultado; puede pensarse como una integral indefinida, donde meto las constantes de ambas integrales, en una sola constante global a la que llamo φ_0.

Usando el cambio de variables $u = \frac{1}{r}$, $du = -\frac{dr}{r^2}$, llego a la siguiente expresión:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{l^2}{m^2}u^2}}$$

Llegados a este punto, solo resta utilizar una de las ayudas del enunciado para resolver la integral.

Sabemos que $\int\frac{du}{\sqrt{a-bu^2}} = -\frac{1}{\sqrt{b}}arccos\left(\sqrt{\frac{b}{a}}u\right)$, por lo tanto:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm arccos\left(\frac{l}{\sqrt{2Em}}u\right)$$

Resulta trivial obtener $r(\varphi)$:

$$r(\varphi) = \frac{l}{\sqrt{2Em}cos(\varphi-\varphi_0)}$$

Tomamos que en $\varphi = 0$, $r = r_0$, con r_0 el punto de retorno (antes llamado 'punto de mínimo acercamiento').

Buscando entonces este r_0 que verifica que $V_{eff} = E$, se llega fácilmente a que $r_0 = \frac{l}{\sqrt{2Em}}$, y usando esta condición en $r(\varphi)$, llegamos ahora sí a la ecuación de la trayectoria:

$$r(\varphi) = \frac{l}{\sqrt{2Em}cos(\varphi)} \tag{5}$$

Antes de ver el gráfico, vamos a recordar por un segundo el caso en el que estamos. Al tomar $k = 0$, el potencial ($V = k/r^2$) se volvió nulo, lo que implica que (tal como se había dicho previamente) se tiene una partícula libre. Uno esperaría que siguiera una trayectoria recta, ya que no hay ninguna fuerza que le genere una aceleración, y al no tener aceleración, la dirección de su trayectoria será siempre la misma. Realmente, ya estamos en condiciones de ver que el resultado al que se llegó es el esperado, no es difícil probar que ec. (5) es la ecuación de una recta en coordenadas polares.

Ahora sí, veámoslo gráficamente:

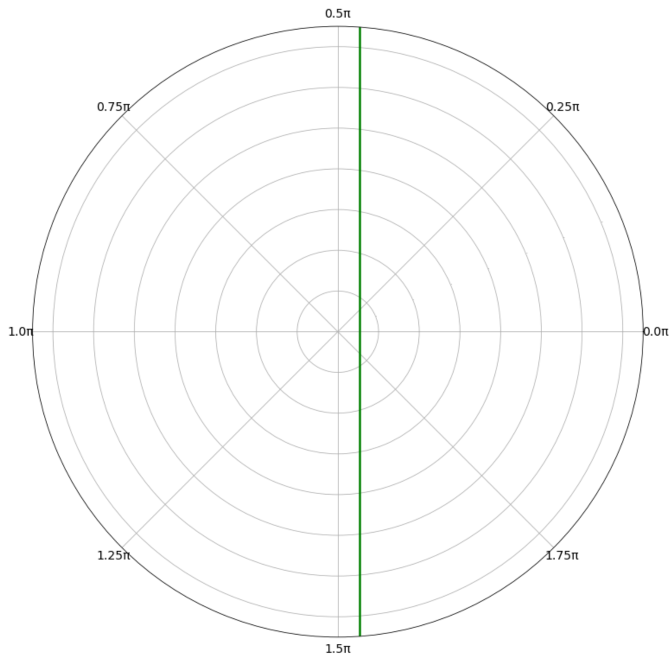

Figura 2: Gráfico polar de $r(\varphi)$ para $k = 0$.

Es lo que esperábamos obtener.

Ahora veamos qué pasa con $k > 0$.

A priori, necesitaríamos hacer de nuevo todo el análisis anterior, considerando ahora el nuevo término que aparece; sin embargo hay un camino más directo.

Retomamos la ec. (2).

Vemos que podemos redefinir el momento angular de la siguiente forma:

$$\widetilde{l}^2 = l^2 + 2km = l^2 \left(1 + \frac{2km}{l^2}\right) = \alpha^2 l^2$$

Con $\alpha = 1 + \frac{2km}{l^2} = \frac{\widetilde{l}}{l}$.

Por otro lado, recordando la ecuación de conservación del momento angular, si multiplicamos por α a ambos lados, llegamos a que:

$$\alpha m r^2 \dot{\varphi} = \alpha l$$
$$m r^2 \dot{\widetilde{\varphi}} = \widetilde{l}$$

Si redefinimos también la variable angular, tomando $\widetilde{\varphi} = \alpha\varphi$.

Usando la nueva definición de l, vamos a escribir cómo queda la ecuación de la conservación de la energía:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\widetilde{l}^2}{2mr^2} \tag{6}$$

Se observa que llegamos a algo muy similar a lo que teníamos en ec. (3), por lo tanto, podemos usar esos resultados.

$$\int_{\widetilde{\varphi}_0}^{\widetilde{\varphi}} d\widetilde{\varphi} = \pm\frac{\widetilde{l}}{m}\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{\widetilde{l}^2}{m^2r^2}}}$$

Integral que ya resolvimos en el caso $k = 0$, por lo tanto, se tiene que:

$$r(\varphi) = \frac{\widetilde{l}}{\sqrt{2Em}cos(\alpha\varphi)} \tag{7}$$

Habrá asíntotas cuando el coseno se anule, esto sucede con $\varphi = \pm\frac{\pi}{2\alpha}$.

Tomaremos $\alpha_\infty = \frac{\pi}{2\alpha}$.

Dicho esto, veamos entonces cómo resulta el gráfico de la ecuación polar de la trayectoria:

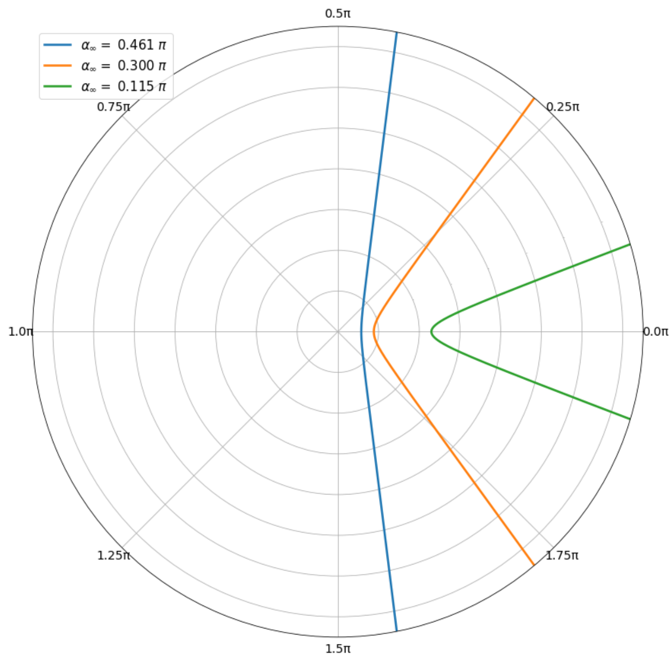

Figura 3: Gráfico polar de $r(\varphi)$ para diferentes valores de α_∞.

Puede verse (más o menos a ojo) que se cumple lo recién dicho respecto a los ángulos de las asíntotas. Para calcular estos α_∞ se fueron tomando diferentes valores de k; a mayor k, menor se vuelve $alpha_\infty$: esto tiene todo el sentido, conforme crece k, la fuerza repulsiva aumenta, y por lo tanto 'expulsa con mayor violencia' a la masa.

2) Resuelva la ecuación de la trayectoria en la variable: $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$ como función de constantes de movimiento. Verifique que obtiene la solucíon obtenida con el método anterior.

Retomamos el V_{eff} visto en la ec. (6). Por newton, tenemos que:

$$m\ddot{r} = \frac{\tilde{l}^2}{mr^3}$$

Queremos escribirlo en función de $u(\varphi)$ y sus derivadas. Para eso, el único problema que tenemos es ver la relación entre esta nueva variable y la derivada segunda temporal de r.

Recordamos el cambio de variables visto previamente, donde $\frac{d}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi}$

Tenemos entonces que:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\dot{\varphi}\frac{du}{d\varphi} = -\frac{l}{m}\frac{du}{d\varphi}$$
$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi}\dot{r} = -\frac{l^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

Usando esta relación en la ecuación de newton, simplificando y despejando $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$, llegamos a que:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{\widetilde{l^2}}{l^2}u$$

Esta es la ecuación del oscilador armónico para $u(\varphi)$, por lo tanto:

$$u(\varphi) = Acos\left(\frac{\widetilde{l}}{l}\varphi + \varphi_0\right)$$
$$r(\varphi) = \frac{1}{Acos\left(\frac{\widetilde{l}}{l}\varphi + \varphi_0\right)}$$

Tomando $\varphi_0 = 0$, y $\frac{1}{A} = \frac{\widetilde{l}}{\sqrt{2Em}}$ vemos que llegamos a la misma solución a la que habíamos llegado antes.

B)¿Cómo se modifica la trayectoria cuando $l^2 > -2mk > 0$?
El enunciado mismo nos indica que $-2mk > 0$ esto ocurre si y solo si $k < 0$ En principio, uno podría pensar que las ecuaciones de movimiento serán completamente diferentes; sin embargo, veremos que eso no es tan así.

La ecuación de conservación de la energía seguirá estando dada por ec. (2).

Podemos (de forma similar a cuando redefinimos el momento angular) tomar una constante $\beta = l^2 + 2km$ quedando así:

$$E = \frac{m\dot{r}}{2} + \frac{\beta}{2mr^2} \tag{8}$$

Acá, nuevamente podemos hacer todo lo que hicimos antes y llegar a la integral que nos venimos encontrando siempre, ya que en ninguno de esos pasos importa el valor de k.

Entonces, ¿En qué paso es relevante eso? Eso importa cuando tomamos la ayuda respecto a la integral a utilizar. Si recordamos la fórmula que venimos utilizando, vemos que para usarla necesitamos que tanto 'a' como 'b' sean mayores que 0. La energía sigue siendo positiva; ¿Y β?. Como tenemos que $l^2 > -2km > 0$, es trivial ver que β resulta mayor que 0 (esto nos indica que el potencial efectivo será el mismo que vimos en fig. (1)). Entonces podemos usar la misma identidad con la que veníamos trabajando y, por lo tanto, la ecuación de la trayectoria es la misma.

Veamos las trayectorias resultantes al ir aumentando el módulo de k:

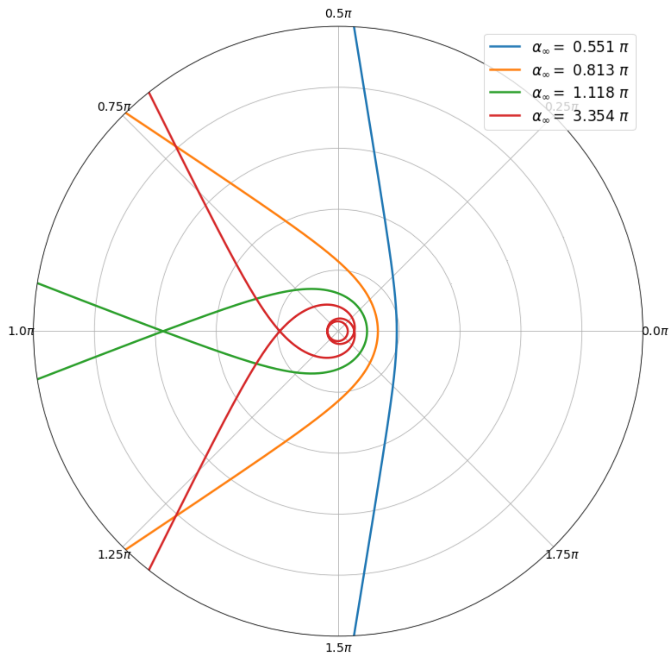

Figura 4: Gráfico polar de $r(\varphi)$ para diferentes valores de α_∞.

Ahora, de forma contraria a como sucedía antes, al aumentar el módulo de k, α_∞ también crece. Por otro lado, pasa algo muy diferente a lo que sucedía antes: previamente α_∞ podía valer, como mucho, $\frac{\pi}{2}$, y esto se daba cuando $k = 0$. Sin embargo, vemos que ahora no solo eso no ocurre, sino que para ciertos casos, este ángulo puede incluso ser superior a 2π. Realmente, lo correcto hubiese sido tomar módulo 2π, ya que estábamos midiendo el ángulo en que 'escapaba' la masita, pero me pareció interesante dejarlo expresado así para analizarlo un poco. ¿Por qué en este caso tenemos ángulos que superan el giro completo? La razón es que, como ahora tenemos un potencial atractivo, para valores 'altos' (en módulo) de k el potencial 'logra retener' la masita por un tiempo, haciendo que esta orbite el centro. Sin embargo, como tenemos que $\beta > 0$, llegado cierto punto 'el momento angular le gana al potencial', y así la masita 'escapa'.

C)Suponer ahora que el potencial es atractivo y que $l^2 < -2mk$ y $E < 0$. Interpretar el movimiento a partir del potencial efectivo y la conservación del momento angular. Dibujar la trayectoria, tomando $\varphi = 0$ en el punto de retorno r_0. Mostrar que el tiempo que tarda la partícula en llegar al origen si partió de un punto de retorno es $\tau = \frac{\sqrt{-(l^2+2mk)}}{2|E|}$.

La ecuación de la conservación queda según ec. (8), con la diferencia de que ahora $\beta < 0$, por lo tanto, el potencial efectivo tendrá la siguiente pinta:

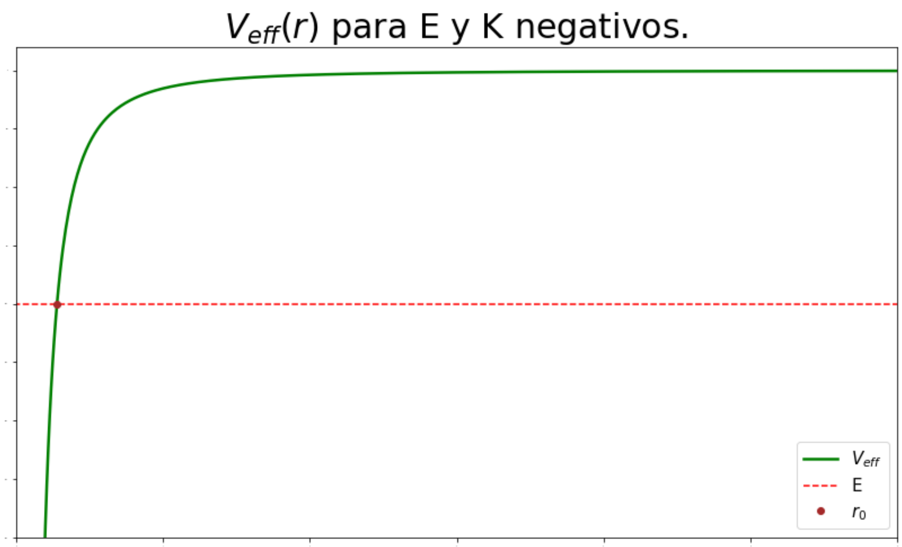

Figura 5: Potencial efectivo para $l^2 < -2mk$.

Analicemos fig. (5). Vemos que para toda $E < 0$ existe un punto de retorno. A la derecha de dicho punto no hay movimiento, ya que $V_{eff} > E$. La partícula entonces irá reduciendo su valor en r.

De la misma forma en que planteamos previamente la integral de la que obtuvimos $\varphi(r)$, hacemos lo mismo ahora, llegando así a que:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{l}{m} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\beta}{r^2}\right)}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{l}{m} \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \beta u^2\right)}}$$

Sin embargo, ahora no podemos utilizar la identidad que veníamos usando, ya que las constantes dentro de la raíz son negativas. Utilizaremos que $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-b}} arccosh\left(\sqrt{\frac{b}{a}}u\right)$.

Usando esta identidad, volviendo a la variable r, y despejándola, se llega a que:

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{\beta}{2Em}} \frac{1}{cosh\left(\frac{\sqrt{-\beta}}{l}(\varphi - \varphi_0)\right)}$$

Tenemos que en $\varphi = 0$, $r = r_0$, con r_0 el punto de retorno; valor que, como me dijo antes, verifica que $V_{eff}(r_0) = E$. Es fácil ver que $r_0 = \sqrt{\frac{\beta}{2Em}}$.

Vemos entonces que la ecuación de la trayectoria de la partícula es:

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{\beta}{2Em}} \frac{1}{cosh\left(\frac{\sqrt{-\beta}}{l}\varphi\right)} \tag{9}$$

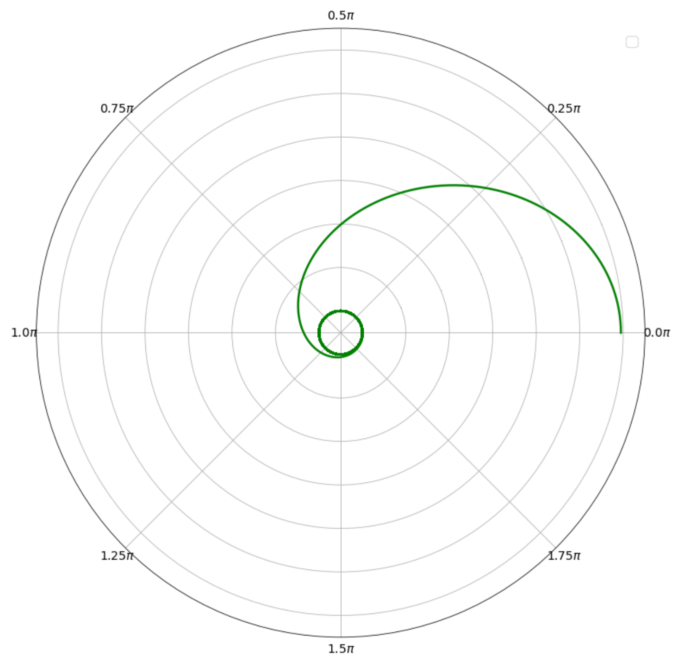

Figura 6: Gráfico polar de $r(\varphi)$ para $l^2 < -2mk$.

Vemos que se forma una suerte de espiral que finaliza en $r = 0$. Que decayera hasta $r = 0$ ya lo habíamos anticipado viendo el potencial efectivo. Es interesante al ver esto recordar esas circunferencias que se generabal alrededor del origen en el inciso B), cuando el potencial ya era atractivo, pero no lo suficientemente 'fuerte' para 'vencer al momento angular'. Vemos que ahora sí el potencial es lo bastante atractivo como para lograr que la partícula termine en $r = 0$.

Calculemos el tiempo que tarda en llegar al origen si parte de un punto de retorno.

De la ecuación de la conservación de la energía, si no realizamos el cambio de variables que nos hace aparecer φ y nos quedamos con la variable temporal, podemos obtener la siguiente integral:

$$\int_0^{\tau} dt = \pm \int_{r_0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\beta}{r^2}\right)}}$$

Resolver esa integral es sencillo reacomodando r, y haciendo el cambio de variable $u = 2mEr^2 - \beta$.

De esa forma, y usando el valor ya calculado de r_0 llegamos a que $\tau = \pm\frac{\sqrt{-\beta}}{2E}$. Tenemos ahí un $\pm$ que nos molesta. Hasta ahora, como siempre aprovechamos la paridad del coseno, no nos molestó para nada, pero ahora habrá que ver qué pasa con eso.

Aparece al despejar $\dot{r}^2$ en la ecuación de conservación. Luego de reescribir eso como $\frac{dr}{dt}$ y separar las variables, llegamos a la siguiente igualdad:

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\beta}{r^2}\right)}}$$

Vemos que el factor que acompaña a dr es siempre mayor que 0, por lo tanto, la parte de dr es positiva. Para definir qué signo utilizar, tenemos que pensar cómo varía r al variar t. Si bien no conocemos $r(t)$, ya vimos que la partícula empieza en un radio r_0 y que, por las características del potencial, lo único que puede hacer es ir irse acercando al origen; en otras palabras, al aumentar el tiempo, disminuye la posición. Con esto en mente, queda claro que el signo que debe ir es '-'.

De esta forma, llegamos ya sí a que:

$$\tau = \frac{\sqrt{-(l^2 + 2mk)}}{2|E|}$$

Donde usamos que, como $E < 0$, entonces $-E = |E|$.

2. Dispersión

D) Para el caso del inciso (A) (potencial repulsivo), halle la sección eficaz diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi)$ siendo χ el ángulo de dispersión.

Empezamos escribiendo la ecuación para la sección eficaz diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \frac{s(\chi)}{sen(\chi)} \left| \frac{ds(\chi)}{d\chi} \right| \tag{10}$$

Para completar el cálculo necesitamos $s(\chi)$. Primero vamos a escribir a $s(\chi)$ como $\chi = \pi - 2\phi_0$, donde ϕ_0 se obtiene de la siguiente expresión:

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2m}{l^2}(E - V(r)) - \frac{1}{r^2}}}$$

r_{min} es el valor de r para el que el denominador se anula.

Aprovechando la conservación de l y de E y usando que al principio $l = mv_\infty s$ y $E = \frac{mv_\infty^2}{2}$, despejamos a l en función de E. Además recordamos que $V(r) = \frac{k}{r^2}$. Considerando todo esto, reescribimos la integral.

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{s^2} - \left(\frac{k}{Es^2} + 1\right)\frac{1}{r^2}}}$$

Sustituimos $u = \frac{1}{r}$, $du = -\frac{1}{r^2}du$ y los extremos pasan a ser $u_{max} = \frac{1}{r_{min}}$ y 0.

$$\phi_0 = \int_0^{u_{max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{s^2} - (\frac{k}{Es^2} + 1)u^2}}$$

La solución de esta integral es conocida y nos la dan como dato.

$$\phi_0 = -\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{Es^2} + 1}}\, arccos\left(\sqrt{\frac{k}{E} + s^2}u\right)\Bigg|_0^{u_{max}}$$

Sabemos que r_{min} hace que el denominador se anule, entonces u_{max} debe cumplir esta misma condición. Es decir:

$$\frac{1}{s^2} - \left(\frac{k}{Es^2} + 1\right)u_{max}^2 = 0 \rightarrow u_{max}\sqrt{\frac{k}{E} + s^2} = 1$$

Esto es lo que nos queda dentro del arccos después de evaluar la función.

Entonces:

$$\phi_0 = -\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{Es^2}+1}}\arccos(1) + \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{Es^2}+1}}\arccos(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{k}{Es^2}+1}}$$

Ahora tocaría despejar $s(\chi)$, sin embargo, por comodidas vamos a despejar $s^2(\chi)$.

$$\chi = \pi - 2\phi_0 \to s = \frac{k(\chi-\pi)^2}{E(\pi^2-(\chi-\pi)^2)}$$

Calculemos la sección eficaz diferencial. Ahora tendrá sentido el porqué hicimos esa elección al momento de despejar $s(\chi)$. Si hubiesemos despejado tal cual, ahora tendríamos que derivar la expresión que tenemos ahora, pero con una raíz, un trabajo bastante engorroso. Lo que tenemos que hacer ahora es 'adaptar' la difición de la sección eficaz a lo que tenemos; esto resulta bastante sencillo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \frac{s(\chi)}{sen(\chi)}\left|\frac{ds(\chi)}{d\chi}\right| = \frac{1}{2sen(\chi)}\left|\frac{db^2}{d\chi}\right|$$

Ahora sí, usamos lo obtenido para calcular $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi)$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \frac{E\pi^2}{ksen(\chi)(\chi^2-2\pi\chi)^2}|\chi-\pi| \tag{11}$$