

Péndulo Doble

Facundo Emina y Vladimir Rodríguez

4 de septiembre de 2021

ANÁLISIS DE LA DEMOSTRACIÓN

La clase del 30/08/21 vimos la demostración de la dinámica de péndulo doble y cómo su movimiento puede desacoplarse en sus dos modos normales. Habiendo ya hecho y entendido el cálculo teórico correspondiente, analizamos el video de la clase para mostrar que efectivamente, dadas las condiciones iniciales adecuadas, ambas masas pueden oscilar en fase (modo normal de menor frecuencia), contrafase (modo normal de mayor frecuencia), o bien como una superposición de ambos modos.

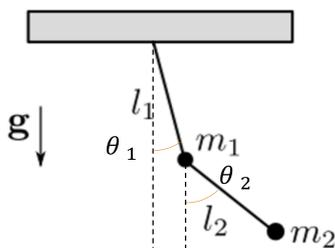


Figura 1

En las figuras siguientes mostramos en los gráficos izquierdos los resultados correspondientes a los ángulos θ_i ($i = 1, 2$) en función del tiempo t ; y en los gráficos derechos, el espectro de frecuencias del cual se compone $\theta_i(t)$ (aclaración: la masa 1, indicada en azul, corresponde a la masa superior, y la masa 2, indicada en naranja, a la inferior). Para analizar el video, obtuvimos las trayectorias usando Tracker (<https://physlets.org/tracker/>).

Recordamos que en el caso en que las longitudes y masas de ambos péndulos son iguales, las frecuencias de los modos normales son

$$\omega_{\pm}^2 = (2 \pm \sqrt{2})g/l \quad (1)$$

donde ω_- corresponde al modo de oscilación en fase, y ω_+ , al de contrafase. La solución más general puede escribirse como la siguiente combinación lineal

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \phi_+) + C_- \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_- t + \phi_-) \quad (2)$$

donde C_{\pm} y ϕ_{\pm} se obtienen mediante las condiciones iniciales.

1. Excitación de los modos

La forma de excitar los modos normales es simple, se agita en forma horizontal la suspensión del péndulo doble de modo que el movimiento se sienta suave y en resonancia, luego se la fija. Al hacer esto lo que se hace es lograr la resonancia con uno de los dos modos, el de baja frecuencia (modo en fase) si se empieza con una baja frecuencia, del mismo modo para el modo de alta frecuencia (modo en contrafase). El tercer experimento es mas “controlado”, se parte del estado de equilibrio y se le da un pequeño golpe impulsivo (corta duración) a la masa m_1 .

2. Modo de baja frecuencia, en fase

Podemos notar que en la demostración se pudo excitar de forma correcta el modo de menor frecuencia, ya que, por un lado, es posible ver de forma cualitativa cómo las dos oscilaciones $\theta_i(t)$ se encuentran en fase. Por otro lado, al estudiar el espectro de frecuencias (esto se obtuvo utilizando las funciones de Transformada de Fourier (fft) de la librería *scipy* en Python), vemos que la única contribución significativa corresponde a un modo de frecuencia $\omega_- \sim 3.39 \text{ s}^{-1}$. Observamos que las oscilaciones son amortiguadas por la viscosidad del aire (rozamiento). Por otro lado, se puede observar la presencia de un segundo pico considerablemente más chico, que corresponde al modo de frecuencia más alta (contrafase).

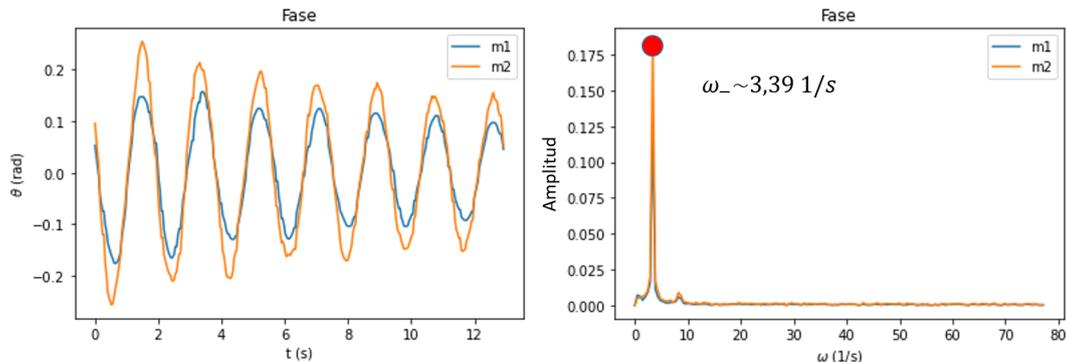


Figura 2: Oscilación en fase

3. Modo de alta frecuencia, en contrafase

Para el modo normal en contrafase, también se pudo obtener un razonable estado inicial, ya que, además de ver cualitativamente que θ_1 y θ_2 se encuentran en contrafase, predomina la contribución de la frecuencia $\omega_+ \sim 8.04 \text{ s}^{-1}$ al analizar el espectro de Fourier. Sin embargo, es posible ver que en este caso, el movimiento de la masa 2 se encontraba levemente contaminado por una contribución del modo 1, que corresponde al primer pico de la curva naranja de la figura 3

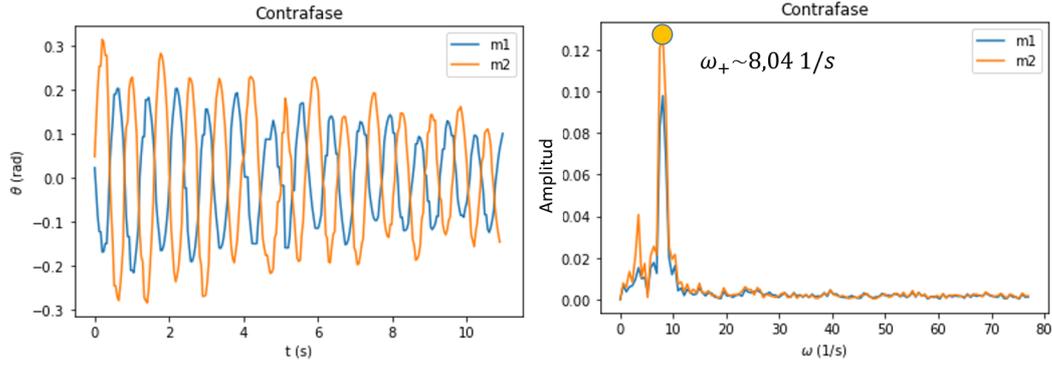


Figura 3: Oscilación en contrafase

Nuevamente, las oscilaciones no son puramente armónicas sino amortiguadas, un poco más que en el caso anterior, y se corresponde a que la fuerza viscosa crece con la velocidad lineal. Podemos ver que las relaciones entre frecuencias y amplitudes de los modos se asemejan a la predicción teórica. Por un lado, dada la ecuación 1, vemos que deberíamos obtener

$$\frac{\omega_-^{teo}}{\omega_+^{teo}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1 \sim 0.414 \quad (3)$$

Y a partir de los resultados obtenidos vemos que

$$\frac{\omega_-^{exp}}{\omega_+^{exp}} \sim 0.422 \quad (4)$$

Por otro lado, el módulo de la razón entre las amplitudes del espectro de frecuencias de θ_1 y θ_2 debería ser $1/\sqrt{2} \sim 0.707$ para ambos modos (ver ec. 6). Al calcular la razón entre amplitudes de ambas coordenadas obtenemos para el modo en Fase que $\text{Amp}_1^-/\text{Amp}_2^- \sim 0.700$ y para el modo en Contrafase, $\text{Amp}_1^+/\text{Amp}_2^+ \sim 0.772$. Precisamente, el último resultado es el que más difiere con la predicción teórica ya que no se alcanzó a excitar al modo puro.

4. Presencia de ambos modos

Por último, analizamos el primer caso mostrado en clase, que corresponde a excitar al sistema con condiciones iniciales dadas por: $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$ (equilibrio) y $\dot{\theta}_1(0) = \alpha$ (desconocido, un golpecito a la masa m_1), $\theta_2(0) = -2\alpha$ esta relación sale de la conservación de impulso lineal total en la dirección horizontal durante la aplicación de la fuerza impulsiva.

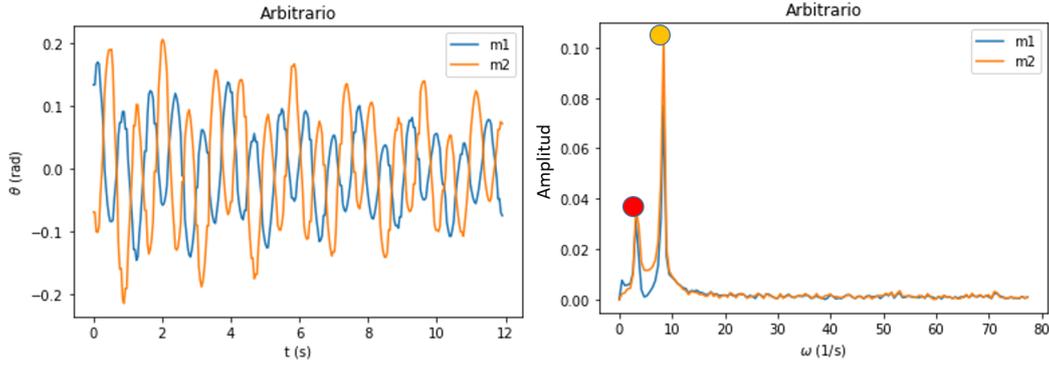


Figura 4: Oscilación arbitraria

Vemos que hay contribuciones de ambos modos normales. Sin embargo, cualitativamente se ve una tendencia a una oscilación en contrafase y esto se debe a una mayor contribución del modo de frecuencia alta. El cálculo teórico para este caso usa las condiciones iniciales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$ mencionadas se obtiene la evolución:

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin(\omega_+ t) + C_- \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin(\omega_- t) \quad (5)$$

calculando las velocidades iniciales y evaluando en $t = 0$ obtenemos el par de ecuaciones ($\dot{\theta}_1 = \alpha$, $\dot{\theta}_2(0) = -2\alpha$):

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} = \omega_+ C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \omega_- C_- \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

de donde se obtiene la proporción teórica entre los modos normales (no depende de α):

$$\frac{C_+^{teo}}{C_-^{teo}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{2} + 1 \sim 2.414 \quad (7)$$

Si calculamos la relación entre el primer pico y el segundo, para cada coordenada, obtenemos que

$$\theta_1: \frac{C_+^{exp}}{C_-^{exp}} = \frac{\text{Amp}_1^+}{\text{Amp}_1^-} \sim 2.45 ; \quad \theta_2: \frac{C_+^{exp}}{C_-^{exp}} = \frac{\text{Amp}_2^+}{\text{Amp}_2^-} \sim 2.94 \quad (8)$$

La comparación es más detallada y muestra que la masa m_2 es mas sensible a los factores de error en el experimento. A pesar de ello la discrepancia entre el experimento y el valor teórico es cercana a un 20 %.

5. Conclusiones

Mas allá de la incomodidad del demostrador al momento de excitar los modos normales del péndulo doble, el método elegido es robusto. Solamente se detectaron pequeñas porciones de los modos que se querían suprimir. Es interesante que el caso con condiciones iniciales contro-

ladas (a menos de un valor α desconocido), provee un muy razonable acuerdo con el resultado experimental, en particular cuando se observa la masa m_1 .