Simetrias y Teorema de Nöther

1. Breve introducción teórica

La versión del Teorema de Nöther que vamos a usar necesita el concepto de simetría de las ecuaciones de movimiento ante una dada transformación de coordenadas o del tiempo.

Para el caso de desplazamientos temporales, la transformación es $t' = t + \epsilon$, usaremos que si $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(t)$ entonces $\delta\mathcal{L} = 0$, los Lagrangianos son iguales por lo que las ecuaciones de movimiento son idénticos. La magnitud conservada es el Hamiltoniano (se usa que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ y que $q(t)$ satisface las ecuaciones de movimiento):

Teorema de Nöther: tiempo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = \text{constante},$$

para derivar esto se se usa que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ y que $q(t)$ satisface las ecuaciones de movimiento.

Las transformaciones de coordenadas que dejan invariante las ecuaciones de movimiento las caracterizamos por un parámetro s, tal que para $s = 0$ la transformación es la transformación idéntica:

$$q_i' = Q_i(s, q, t), \qquad \dot{q}_i' = \frac{d}{dt}Q_i(s, q, t), \qquad Q_i(s = 0, q, t) = q_i.$$

Para que las ecuaciones de movimiento sean invariantes ante las transformación es suficiente una invariancia generalizada del Lagrangiano:

Hipótesis del Teorema de Nöther: coordenadas

$$\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt}$$

pues hemos visto que si difieren en una derivada total respecto del tiempo, las ecuaciones de movimiento se preservan.

Nos va a interesar las transformaciones infinitesimales $s = \epsilon$, por lo que podemos expandir en Taylor alrededor de $s = 0$. A primer orden obtenemos:

$$q_i' = q_i + \epsilon K_i(q, t), \qquad K_i = \frac{dQ_i(s, q, t)}{ds}|_{s=0} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta q_i = \epsilon K_i(q, t)$$

Consideremos que existe una simetría generalizada del Lagrangiano para des-

plazamientos infinitesimales:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i (\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i})} \delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i) = \epsilon\frac{dG(q,t)}{dt}$$

donde nuevamente se usó que las trayectorias que consideramos son las que satisfacen las ecuaciones de movimiento. Podemos reescribir el segundo término como una derivada total, usando $p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$ s obtiene

Teorema de Nöther: invariancia ante transformación de coordenadas

$$\frac{d}{dt}(\sum_i p_i\delta q_i - F) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_i p_i(q,t)\delta q_i - F(q,t) = c$$

Se deberá cancelar el término de orden infinitesimal común para obtener la correcta magnitud conservada.

Alternativamente, podemos hacer uso de los δq_i generales para cancelar el valor fijo ϵ común,

$$\frac{d}{dt}(\sum_i p_i K_i - G) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_i p_i(q,t)K_i(q,\dot{q},t) - G(q,t) = C$$

esta fórmula es menos amigable pues requiere recordar la definición de las magnitudes K_i. Su ventaja es que el término común ϵ no aparece.

2. Ejemplo 1: Oscilador armónico isótropo

Veamos el uso de las dos formas del Teorema de Noether para el siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{k}{2}x^2 + y^2$$

Este problema es muy simple en coordenadas cartesianas. Su solución es:

$$x(t) = a\cos(\omega t + \varphi_x) \qquad\qquad y(t) = b\cos(\omega t + \varphi_y)$$

con $\omega^2 = k/m$.

El Hamiltoniano se conserva pues el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. En este caso el Hamiltoniano es la energía pues la energía cinética es cuadrática homogenea en las velocidades generalizadas, podemos verificar entonces que:

$$E = T + V = \frac{m\omega^2}{2}(a^2 + b^2)$$

Veamos ahora si se puede plantear una transformación de coordenadas que sea simetría del Lagrangiano. Una forma de trabajar es buscar transformaciones que dejan T y V invariantes (y por consiguiente a $\mathcal{L}$). Como V es proporcional a r^2 veamos una rotación:

$$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \qquad y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$$

las velocidades se obtienen derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{x}' = \dot{x}\cos(\theta) - \dot{y}\sin(\theta) \qquad \dot{y}' = \dot{x}\sin(\theta) + \dot{y}\cos(\theta)$$

es fácil verificar que ambos T y V se mantienen invariantes por lo que hemos hallado una simetría del Lagrangiano.

Para evaluar la magnitud que se conserva, primero vemos que $\delta\mathcal{L} = 0$ por lo que no hay una función F (o G). Necesitamos hallar la transformación infinitesimal (en este caso el parámetro es θ), para $\theta = \epsilon$ expandiendo la transformación a orden lineal en ϵ obtenemos:

$$x' = x - y\epsilon \qquad \Longrightarrow \delta x = -y\epsilon, \qquad\qquad y' = x\epsilon + y \qquad \Longrightarrow \delta y = x\epsilon$$

Usando el teorema de Noether para transformaciones de coordenadas, obtenemos:

$$p_x(-y\epsilon) + p_y(x\epsilon) = c \qquad \Longrightarrow \qquad xp_y - yp_x = L_z = C$$

La magnitud conservada es la componente z del Momento Angular L_z. Usando la solución de las ecuaciones de movimiento obtenemos el valor de la constante:

$$L_z = mab\omega\sin(\varphi_x - \varphi_y)$$

3. Ejemplo 2: Problema relacionado al oscilador armónico isótropo

Partamos ahora de un Lagrangiano

$$\mathcal{L} = m\dot{x}\dot{y} - kxy$$

No es difícil verificar que las ecuaciones de movimiento son las mismas que las del ejemplo anterior, y por consiguiente sus soluciones. Este ejemplo es interesante en cuanto que una dilatación en x y un acortamiento la misma proporción en y, deja invariante el Lagrangiano:

$$x' = e^{\lambda}x \qquad\qquad y' = e^{-\lambda}y$$

las velocidades se obtienen derivando esto con respecto al tiempo:

$$\dot{x}' = e^{\lambda}\dot{x} \qquad\qquad \dot{y}' = e^{-\lambda}\dot{y}$$

y es una simetría del Lagrangiano

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}$$

por lo que nuevamente $F = 0$.

Para evaluar la magnitud que se conserva, necesitamos hallar la transformación infinitesimal (en este caso el parámetro es λ), para $\lambda = \epsilon$ expandiendo la transformación a orden lineal en ϵ obtenemos:

$$x' = x + \epsilon x \qquad \Longrightarrow \delta x = \epsilon x, \qquad\qquad y' = y - \epsilon y \qquad \Longrightarrow \delta y = -\epsilon y$$

Usando el teorema de Noether para transformaciones de coordenadas, obtenemos:

$$p_x(x\epsilon) + p_y(-y\epsilon) = c \qquad \Longrightarrow \qquad xp_x - yp_y = C$$

Debemos poner atención que para este problema

$$p_x = m\dot{y} \qquad\qquad p_y = m\dot{x}$$

Por lo que la constante de movimiento es en definitiva la misma que en el problema anterior.

4. Ejemplo 3: Partícula cargada en campo eléctrico uniforme

Partamos ahora de un Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + eEx$$

Es claro que una traslación espacial no es una invariancia del Lagrangiano. Veremos que es una invariancia generalizada:

$$x' = x + d \qquad \dot{x}' = \dot{x}$$

En efecto obtenemos que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \underbrace{eEd}_{\frac{dF}{dt}} \qquad \Longrightarrow \qquad F = eEdt$$

Para evaluar la magnitud que se conserva, necesitamos hallar la transformación infinitesimal (en este caso el parámetro es d), para $d = \epsilon$ expandiendo la transformación a orden lineal en ϵ obtenemos:

$$x' = x + \epsilon \qquad \Longrightarrow \delta x = \epsilon$$

Usando el teorema de Noether para transformaciones de coordenadas, obtenemos:

$$p_x(\epsilon) - eE\epsilon t = c \qquad \Longrightarrow \qquad p_x - eEt = C$$

De hecho esta es una integral primera de las ecuaciones de movimiento. Lo interesante es que se obtuvo sin plantear las ecuaciones de movimiento.

5. Ejemplo 4: Conservación de H usando transformaciones de coordenadas y que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$

Sea un Lagrangiano general pero que no depende explícitamente del tiempo:

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$$

Vamos a usar una traslación en el tiempo en un monto $\delta t = \epsilon$. Usemos que esto se traduce en el siguiente cambio de coordenadas:

$$q_i' = q_i + \dot{q}_i \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \delta q_i = \epsilon \dot{q}_i$$

Las velocidades se calculan derivando esto con respecto al tiempo:

$$\dot{q}_i' = \dot{q}_i + \ddot{q}_i \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \delta \dot{q}_i = \epsilon \ddot{q}_i$$

El cambio de Lagrangiano está dado por:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i) = \epsilon \sum_i (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i) = \epsilon (\frac{d\mathcal{L}}{dt} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}_{0})$$

Por lo que es una simetría generalizada del Lagrangiano con $G = \mathcal{L}$. Usando el teorema de Noether se obtiene que:

$$\sum_i (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i) - \mathcal{L} = H$$

donde H es el Hamiltoniano constante.

6. Ejemplo 5: sistema aislado

Habiendo hecho cuatro ejemplos y habiéndo explicado en clase de pizarra la simetría de rotación del sistema aislado, se deja a les alumnes la tarea de hallar las 7 magnitudes conservadas para este problema: una debido a la homogeneidad del tiempo (energía), 3 debido a la homogeneidad del espacio (vector momento lineal total) y 3 debido a la isotropía del espacio (vector momento angular total).