**Mecánica Clásica - primer cuatrimestre de 2021**

**Guía 3:** *Fuerzas centrales y dispersión*

1. Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias. El período del movimiento es $\tau$. Este movimiento es detenido súbitamente; luego las partículas caen una hacia la otra. Discuta por qué. Demuestre que chocan después de un tiempo $\tau/4\sqrt{2}$.

2. El potencial de un oscilador isótropo es

$$V(r) \;=\; \frac{kr^2}{2} \qquad (k > 0)\;.$$

   (a) Escriba el Lagrangiano justificando por qué el movimiento es plano. Estudie el problema unidimensional equivalente.

   (b) Grafique el potencial efectivo para un caso general. Encuentre el radio, la energía y el período para el caso en que la órbita es circular. Analice su estabilidad.

   (c) Discuta los movimientos posibles en función del valor de la energía. ¿Cómo se modifica el movimiento si, manteniendo la energía constante, aumenta el momento angular? Piense en el límite $\ell \to 0$.

   (d) Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la órbita circular. Encuentre la frecuencia de oscilación radial. Haga este mismo cálculo para el problema de Kepler $V(r) = -\frac{k}{r}$, compare ambos casos.

3. Discuta el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central

$$F(r) \;=\; -\frac{k}{r^2} + \frac{c}{r^3} \qquad (k, c > 0)\;.$$

   (a) Muestre que la ecuación de la órbita puede escribirse de la forma

$$r = \frac{d}{1 + e\cos(\alpha\varphi)}\;.$$

   Encuentre el valor de las constantes $d$, $e$ y $\alpha$ en el caso $E < 0$. (*Ayuda*: Observe que el problema se reduce al de Kepler si se redefinen el momento y la variable angular apropiadamente. Por lo tanto, si ya resolvió el problema de Kepler, no es necesario calcular nuevamente la órbita.)

   (b) Repita el inciso anterior usando la ecuación de la trayectoria en la variable: $u(\varphi) \;=\; 1/r(\varphi)$, llamada también ecuación de Binet: $u''(\varphi) + u(\varphi) + \dfrac{\mu}{\ell^2\, u(\varphi)^2}\, F\left(\dfrac{1}{u(\varphi)}\right) \;=\; 0\;.$

   (c) Cuando $\alpha = 1$ la ecuación del inciso (a) representa una elipse. Cuando $\alpha > 1$ es una elipse que precede. El movimiento de precesión puede describirse en términos de la velocidad angular de precesión del perihelio. Encuentre esta velocidad en términos de $\alpha$.

*Algunos datos*: En el caso de la elipse ($e < 1$), si $A$ es el semi-eje mayor, $B$ el menor y $F$ el foco, entonces la excentricidad, el perihelio y el afelio (distancias de mínimo y máximo acercameniento) son

$$e = \frac{F}{A} = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}\,, \qquad r_{per} = A(1-e)\,, \qquad r_{af} = A(1+e)\,, \qquad d = \frac{B^2}{A} = A(1-e^2)\,.$$

4. Una partícula de masa $m$ se mueve bajo la influencia de un potencial central $V(r) = k/r^2$.

   (a) Para el caso en que el potencial sea repulsivo y $E > 0$, interpretar el movimiento a partir del potencial efectivo. Resuelva la ecuación de la trayectoria en la variable en la variable: $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$ como función de constantes de movimiento Dibujar la trayectoria en el plano $x - y$. Calcular las direcciones de las asíntotas, si las hubiere. ¿Qué ocurre cuando $k = 0$? Verificar que en el límite $k \longrightarrow 0$ la solución hallada es la físicamente correcta.

   (b) Suponer ahora que el potencial es atractivo y que $\ell^2 < -2mk$ y $E < 0$. Interpretar el movimiento a partir del potencial efectivo. Dibujar la trayectoria, tomando $\varphi_0 = 0$ en el punto de retorno $r_0$. Mostrar que el tiempo que tarda la particula en llegar al origen si partió de un punto de retorno es $\tau = \sqrt{\ell^2 + 2mk}/2|E|$.

   (c) ¿Cómo se modifica la trayectoria cuando $l^2 > -2mk > 0$?

5. Una partícula de masa $m$ se mueve en un campo central cuyo potencial viene dado por

$$V(r) = -\frac{k}{r^4} \qquad (k > 0)\,.$$

   (a) Exprese el potencial efectivo del problema unidimensional equivalente, y haga un dibujo cualitativo del mismo. ¿Existe alguna órbita circular? En caso afirmativo, determine su radio, energía y período como función del momento angular. Analice su estabilidad.

   (b) Utilizando el potencial efectivo discuta cualitativamente las trayectorias posibles para distintos valores de energía y momento angular. Halle $r_0$ donde $V_{eff}(r_0) = 0$ para momento angular no nulo.

   (c) Muestre que $r(\varphi) = A\cos(\varphi)$ es una solución posible y determine $A$ usando la ecuación de Binet (ver ejercicio 3.b). Interprete este movimiento y dibuje la trayectoria. ¿A qué órbita de las halladas en a) corresponde? ¿Cuál es su energía?

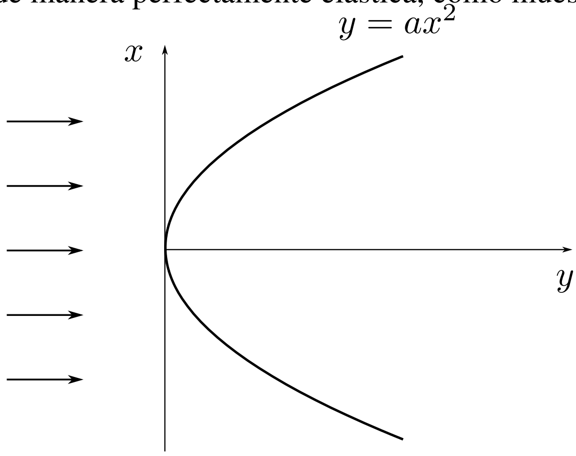
6. Un satélite de masa $m$ se mueve en un potencial central atractivo, $V(r) = -k/r$. Súbitamente el valor de la constante $k$ se reduce a la mitad. Encuentre la nueva órbita.

# Dispersión

7. Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas por una esfera perfectamente rígida de radio $R$.

8. Sobre una esfera rígida incide un haz de partículas. Las partículas que chocan contra la esfera son absorbidas con una probabilidad proporcional a la componente de su velocidad normal a la esfera, $p = q|v_n|$ (asuma $q$ conocido). Las partículas que no son absorbidas rebotan elásticamente. La probabilidad total es 1. Hallar las sección eficaz diferencial y la total.

9. Calcule la sección eficaz diferencial y total para partículas que inciden sobre un paraboloide de revolución, con el cual chocan de manera perfectamente elástica, como muestra la figura.




10. Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas de masa $m$ en un pozo de potencial esféricamente simétrico, con $V = 0$ para $r \geq a/2$ y $V = -V_0$ para $r < a/2$.

11. En el ciclotrón de la CNEA se aceleran partículas $\alpha$ a una energía de 55 MeV. Se obtiene un haz de 0.5 nanoamperes de intensidad que se hace incidir sobre un blanco de oro de 0.5 mg/cm$^2$. A 20 cm del blanco y formando un ángulo de 5 grados con la dirección del haz incidente se coloca un detector de estado sólido, que cuenta todas las partículas que pasan por un orificio circular de 1 mm de diámetro. ¿Cuántas partículas se espera contar por segundo por efecto de la dispersión coulombiana? Para un núcleo formado por $A$ nucleones, su radio viene dado aproximadamente por $R \sim 1.2A^{1/3}$ fermi. ¿Podrán observarse entonces efectos nucleares? ¿Cómo se manifestarían dichos efectos? Considere los siguientes datos: 1 MeV = $1.60 \times 10^{-6}$ ergios; 1 fermi= $10^{-13}$ cm; oro: $\mathrm{Au}_{79}^{197}$; part $\alpha$: $\mathrm{He}_2^4$; masa de los nucleones: $1.67 \times 10^{-24}$ g; $N_a$ = número de Avogadro $= 6.02 \times 10^{23}$; $e = 1.6 \times 10^{-19}$ coulombs; $e^2 = 1.43 \times 10^{-13}$ MeV cm.