Gina A. Alongi
Gastón De La Rosa

Entrega Guía 4

October 2, 2021

Lagrangiano de pequeñas oscilaciones

(a)

En la Figura 1 se puede ver cómo tomamos la coordenadas.De esta Figura podemos ver que habrán 4 grados de libertad, lo cual implica que tendremos 4 coordenadas generalizadas. Es decir, habrá 4 modos normales para esta configuración.

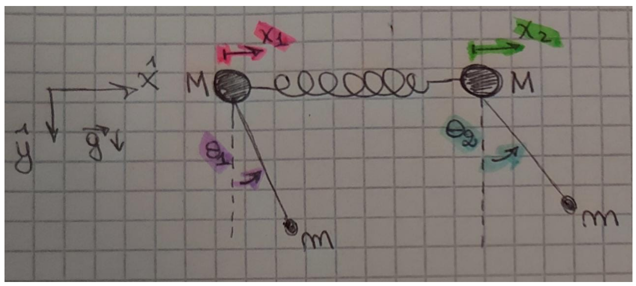

Figure 1: Diagrama del sistema de estudio y las coordenadas generalizadas a ser utilizadas.

Para el lagrangiano de pequeñas oscilaciones y calcular las matrices **T** y **V** es necesario primero escribir el lagrangiano normal. El mismo queda como:

Sabemos que la energía cinética será:

$$T = \frac{m+M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m+M}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}[ml^2\dot{\theta}_1^2 + ml^2\dot{\theta}_2^2 + 2ml\cos{(\theta_1)}\dot{x}_1\dot{\theta}_1 + 2ml\cos{(\theta_1)}\dot{x}_2\dot{\theta}_2] \quad (1)$$

Y el potencial será:

$$V = V_g + V_r = -mgl(\cos{(\theta_1)} + \cos{(\theta_1)}) + \frac{k}{2}(x_2^2 + x_1^2) - kx_2x_1 + kl_0x_2 - kl_0x_1 \quad (2)$$

Donde en la expresión de V aparecía una $\frac{kl_0^2}{2} = cte$ que tiramos pues el lagrangiano es invariante a esa constante.

$$L = T - V \quad (3)$$

Donde T y V toman las expresiones desarrolladas en (1) y (2), respectivamente.

Ahora, buscamos el punto de equilibrio que será el mínimo de potencial $\Rightarrow$ lo que necesitamos es que $\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$ donde q_i es cada una las coordenadas generalizadas $\theta_1, \theta_2, x_1, x_2$. Es decir, la derivada del potencial respecto a cada una de estas coordenadas debe anularse para obtener el punto de equilibrio que buscamos.

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = mlg\sin{(\theta_1)} = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = mlg\sin(\theta_2) = 0 \Leftrightarrow \theta_2 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = kx_1 - kx_2 - kl_0 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = l_0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = kx_2 - kx_1 + kl_0 = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = l_0 \tag{7}$$

Y la única menra en que se cumplan las ecuaciones (6) y (7) es si $\mid x_2 - x_1 \mid = l_0$. Lo cual me genra cierta libertad respecto de las posiciones de las masas: no me importa su posición en sí, sino la distancia entre las mismas. Por este motivo, poniendo el cero en x_1 es que llegamos a que el equilibrio está en:

$$eq = (\theta_1^{(eq)}; \theta_2^{(eq)}; x_1^{(eq)}; x_2^{(eq)}) = (0; 0; 0; l_0) \tag{8}$$

Ahora sí, podemos calcular el lagrangiano para pequeñas oscilaciones. Definimos las coordenadas generalizadas de pequeños desplazamientos alrededor del equilibrio como:

$$\eta_1 = \theta_1 - \theta_1^{(eq)} = \theta_1 \tag{9}$$

$$\eta_2 = \theta_2 - \theta_2^{(eq)} = \theta_2 \tag{10}$$

$$\eta_3 = x_1 - x_1^{(eq)} = x_1 \tag{11}$$

$$\eta_4 = x_2 - x_2^{(eq)} = x_2 - l_0 \tag{12}$$

Luego, dado que T es de orden cuadrático ya, solo reemplazamos por los valores de $\dot{\eta}_i$ que corresponda y desarrollo a orden 0 (evalúo en el punto de equilibrio) a las funciones que acompañan a los $\dot{\eta}_i$.

$$T^{(eq)} \simeq \dot{\eta}_3^2 \frac{m+M}{2} + \dot{\eta}_4^2 \frac{m+M}{2} + \frac{1}{2}[ml^2\dot{\eta}_1^2 + ml^2\dot{\eta}_2^2 + 2l\dot{\eta}_3\dot{\eta}_1 + 2l\dot{\eta}_4\dot{\eta}_2] \tag{13}$$

Calculamos la aproximación de V como $\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \mid_{eq} \eta_i \eta_j$ y así obtenemos que:

$$V^{(eq)} \simeq lmg\eta_1^2 + mlg\eta_2^2 + k\eta_3^2 + k\eta_4^2 - 2k\eta_4\eta_3 \tag{14}$$

Luego, con (13) y (14) podemos obtener el lagrangiano de pequeñas oscilaciones como:

$$L \simeq T^{(eq)} - \frac{1}{2}V^{(eq)} \tag{15}$$

Finalmente, las matrices **T** y **V** quedan escritas como:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & lm & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 & lm \\ lm & 0 & m+M & 0 \\ 0 & lm & 0 & m+M \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} lmg & 0 & 0 & 0 \\ 0 & lmg & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{pmatrix} \tag{17}$$

Modos normales

(b)

El modo de frecuencia cero será una traslación rígida $\implies$ queremos que todo el sistema se desplace como "un bloque" $\implies$ las masitas m del péndulo deben ir a una posición en $\hat{y} = cte$ y vayan siguiendo a la masa a la que están sujetas en $\hat{x}$.

Sabemos que las masas M se moverán con igual amplitud (planteamos 1) para que el resorte no se comprima. Es decir,para las masas grandes tenemos que:

$$X_1 = 1\hat{x} \qquad\qquad X_2 = 1\hat{x} \tag{18}$$

Y para las masas chicas tenemos:

$$\Phi_1 = l\cos(\theta_1)\hat{y} + (l\sin(\theta_1) + x_1)\hat{x} \qquad\qquad \Phi_2 = l\cos(\theta_2)\hat{y} + (l\sin(\theta_2) + x_2)\hat{x} \tag{19}$$

Luego, para conseguir lo que dijimos:

$$\cos(\theta_1) = 1 \quad \mathbf{y} \quad \sin(\theta_1) = 0 \quad \implies \quad \theta_1 = 0 \tag{20}$$

Análogamente para la otra masita:

$$\cos(\theta_2) = 1 \quad \mathbf{y} \quad \sin(\theta_2) = 0 \quad \implies \quad \theta_2 = 0 \tag{21}$$

Finalmente, el modo normal para $\omega = 0$:

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

(c)

Usando la simetría proponemos los otros 3 modos normales restantes y por medio de la ortogonalidad respecto de **T** refinamos estas propuestas.

En la Figura 2 se ve cómo se plantea el plano de reflexión y cómo se define el "autovector de muestra" para ver ver cómo es el modo debido a esta simetría.

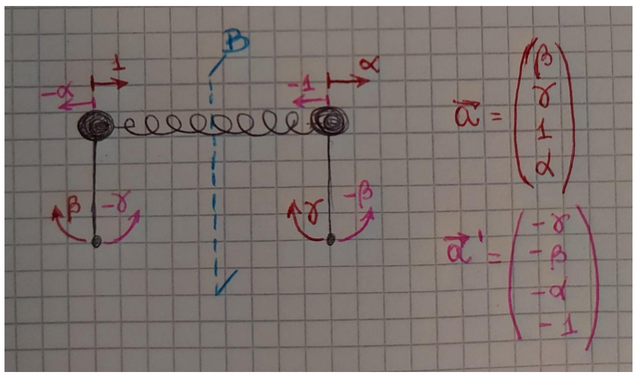

Figure 2: Diagrama para plantear modos debido a la reflexión. a es el autovector de prueba. a' es el autovector pasado por la reflexión respecto del plano B que da la matriz $\mathbf{S}$.

Sabemos que:

$$\mathbf{S}a = a' \tag{23}$$

Donde:

$$a = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$a' = \begin{pmatrix} -\gamma \\ -\beta \\ -\alpha \\ -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

A partir de esto, podemos relacionar los modos siméttricos y antisimétricos como:

$$\mathbf{S}a_{\pm} = \pm a'_{\pm} \tag{27}$$

Donde + representa modo simétrico y **-** representa antisimétrico.

Comenzamos con el caso antisimétrico donde $\mathbf{S}a_- = -a'_-$. Es decir, planteamos:

$$\begin{pmatrix} -\gamma \\ -\beta \\ -\alpha \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{28}$$

De donde obtenemos el modo normal antisimétrico como:

$$a_1 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Pedimos la ortonormalidad respecto de $\mathbf{T}$ entre a_0 y el a_1 obtenido:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & lm & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 & lm \\ lm & 0 & m+M & 0 \\ 0 & lm & 0 & m+M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{30}$$

Y de ahí sacamos que:

$$\gamma = -\frac{m+M}{ml}$$

$$\implies a_1 = \begin{pmatrix} -\frac{m+M}{ml} \\ -\frac{m+M}{ml} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Por otro lado y de manera análoga planteamos el caso simétrico como $\mathbf{S}a_{-+} = +a'_+$. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -\gamma \\ -\beta \\ -\alpha \\ -1 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{32}$$

De donde nos queda que el modo normal simétrico es:

$$a_2 = \begin{pmatrix} -\gamma \\ \gamma \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Planteamos la ortonormalidad con a_0 respecto de $\mathbf{T}$:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & lm & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 & lm \\ lm & 0 & m+M & 0 \\ 0 & lm & 0 & m+M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\gamma \\ \gamma \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \tag{34}$$

De donde en este caso obtenemos la ecuación:

$$-\gamma ml + \gamma ml + m + M - m - M = 0$$

Lo cual se cumple **para cualquier valor de** γ. Luego, no es posible refinar más esta definición utilizando la ortonormalidad respecto de $\mathbf{T}$.

(d)

Vamos a cacular las frecuencias ω_i de cada modo normal de los hallados en el punto anterior por medio de la ecuación de autovectores y autovalores:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{a} = \omega^2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} \tag{35}$$

Resolveremos la ecuación (35) para los valores hallados de a_1 (ecuación (31)) y a_2 (ecuación (33)).
En el caso de a_1 (31) vamos a tener:

$$\begin{pmatrix} lmg & 0 & 0 & 0 \\ 0 & lmg & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{m+M}{ml} \\ -\frac{m+M}{ml} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega_1^2 \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & lm & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 & lm \\ lm & 0 & m+M & 0 \\ 0 & lm & 0 & m+M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{m+M}{ml} \\ -\frac{m+M}{ml} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

De donde obtenemos las siguientes 2 ecuaciones LI:

$$-\frac{m+M}{ml} glm = \omega_1 (-\frac{m+M}{ml} ml^2 + ml) \tag{37}$$

$$0 = \omega_1^2 (-\frac{m+M}{ml} ml + m + M) \tag{38}$$

De la ecuación (37) sabemos que:

$$\omega_1^2 = \frac{g(m+M)}{Ml} \tag{39}$$

Luego, para verificar que este valor sea correcto lo reemplazamos en la ecuación (38) y llegamos a que $0 = 0 \implies$ el valor hallado para ω_1 en la ecuación (39) es correcto.

Por otro lado y de manera análoga planteamos la ecuación de autovectores (35) para el vector a_2 (33).

$$\begin{pmatrix} lmg & 0 & 0 & 0 \\ 0 & lmg & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\gamma \\ \gamma \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \omega_1^2 \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & lm & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 & lm \\ lm & 0 & m+M & 0 \\ 0 & lm & 0 & m+M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\gamma \\ \gamma \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

En este caso, vamos a obtener el siguiente sistema de 2 ecuaciones LI que nos va a permitir no sólo fijar ω_2 sino también el valor de γ para esa frecuencia.

$$\gamma mgl = \omega_2^2(\gamma ml^2 - ml) \tag{41}$$

$$2k = \omega_2^2(-ml\gamma + m + M) \tag{42}$$

Despejando ω_2 de ambas ecuaciones ((41) y (42)) e igualando esos valores llegamos a una cuadrátrica para el valor de γ de la forma:

$$\gamma^2 - \frac{g(m+M) - 2kl}{ml} \cdot \gamma - \frac{2k}{ml} = 0 \tag{43}$$

De donde obtenemos las siguientes dos soluciones para γ:

$$\gamma^{(1)} = \frac{g(m+M) - 2kl}{ml} + \sqrt{(\frac{g(m+M) - 2kl}{ml})^2 + \frac{8k}{ml}} \tag{44}$$

$$\gamma^{(2)} = \frac{g(m+M) - 2kl}{ml} - \sqrt{(\frac{g(m+M) - 2kl}{ml})^2 + \frac{8k}{ml}} \tag{45}$$

Y debido a que de la ecuación (42) vemos que ω_2 depende del $\gamma \implies$ tendremos 2 valores de ω, uno para cada γ obtenido.

$$\omega_2^{(1)2} = \frac{2k}{-ml(\frac{g(m+M)-2kl}{ml} + \sqrt{(\frac{g(m+M)-2kl}{ml})^2 + \frac{8k}{ml}}) + m + M} \tag{46}$$

$$\omega_2^{(2)2} = \frac{2k}{-ml(\frac{g(m+M)-2kl}{ml} - \sqrt{(\frac{g(m+M)-2kl}{ml})^2 + \frac{8k}{ml}}) + m + M} \tag{47}$$

Resumiendo, tenemos 4 modos normales:

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_1 = \begin{pmatrix} -\frac{m+M}{ml} \\ -\frac{m+M}{ml} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -\gamma^{(1)} \\ \gamma^{(1)} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad a_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -\gamma^{(2)} \\ \gamma^{(2)} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Cuyas frecuencias en el mismo orden son:

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_1^2 = \frac{g(m+M)}{Ml} \quad \omega_2^{(1)2} = \frac{2k}{-ml\gamma^{(1)} + m + M} \quad \omega_2^{(2)2} = \frac{2k}{-ml\gamma^{(2)} + m + M} \tag{49}$$

Donde $\gamma^{(1)}$ es el valor de la ecuación (44) y $\gamma^{(2)}$ es el de la (45).

Solución general y coordenadas normales

(e)

La solución general del problema es:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = (\nu + \nu' \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [B_1 cos(\omega_1 t) + C_1 sen(\omega_1 t)] \cdot \begin{pmatrix} -\frac{m+M}{ml} \\ -\frac{m+M}{ml} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$+ [B_2^{(1)} cos(\omega_2^{(1)} t) + C_2^{(1)} sen(\omega_2^{(1)} t)] \cdot \begin{pmatrix} -\gamma^{(1)} \\ \gamma^{(1)} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$+ [B_2^{(2)} cos(\omega_2^{(2)} t) + C_2^{(2)} sen(\omega_2^{(2)} t)] \cdot \begin{pmatrix} -\gamma^{(2)} \\ \gamma^{(2)} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{50}$$

Y para encontrar las coordenadas normales ξ vamos a plantear:

$$\xi = A^T \cdot T \cdot \eta \tag{51}$$

Donde **A** es la matriz con los vectores a_i que se ven en la ecuación (48) como columnas. Haciendo la cuenta que indica la ecuación (51) llegamos a que:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{m+M}{ml} & -\frac{m+M}{ml} & 1 & 1 \\ -\gamma^{(1)} & \gamma^{(1)} & 1 & -1 \\ -\gamma^{(2)} & \gamma^{(2)} & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & lm & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 & lm \\ lm & 0 & m+M & 0 \\ 0 & lm & 0 & m+M \end{pmatrix} \cdot \eta \tag{52}$$

Haciendo el desarrollo llegamos que:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lm(\eta_1+\eta_2) + (m+M)(\eta_3+\eta_4) \\ Ml(\eta_1+\eta_2) \\ (-\gamma^{(1)}ml^2 + ml)(\eta_1-\eta_2) + (-\gamma^{(1)}lm + m + M)(\eta_3-\eta_4) \\ (-\gamma^{(2)}ml^2 + ml)(\eta_1-\eta_2) + (-\gamma^{(2)}lm + m + M)(\eta_3-\eta_4) \end{pmatrix} \tag{53}$$

(f)

En este caso debemos fijar las constantes B_i, C_i ν y ν' que se ven en la ecuación (50) para las condiciones iniciales que dice el enunciado.

El enunciado nos dice que el resorte lo estiramos una magnitud $\Delta \implies$ podemos suponer que desplazamos la masa grande de la derecha en Δ. Además, por enunciado sabemos que el sistema parte del reposo una vez estirado el resrote en Δ. Luego, tenemos que las condiciones iniciales serán (tomando en cuenta las definiciones de η_i que se ven en las ecuaciones 9, 10, 11 y 12):

$$\eta_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \end{pmatrix} \qquad \dot{\eta}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Basta imponer condiciones iniciales (54) en la ecuación (50) y su derivada. Haciendo esto llegamos a siguiente sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas:

$$0 = -\frac{m+M}{ml}B_1 - \gamma^{(1)}B_2^{(1)} - \gamma^{(2)}B_2^{(2)} \tag{55}$$

$$0 = -\frac{m+M}{ml}B_1 + \gamma^{(1)}B_2^{(1)} + \gamma^{(2)}B_2^{(2)} \tag{56}$$

$$0 = \nu + B_1 + B_2^{(1)} + B_2^{(2)} \tag{57}$$

$$\Delta = \nu + B_1 - B_2^{(1)} - B_2^{(2)} \tag{58}$$

$$0 = -\frac{m+M}{ml}\omega_1 C_1 - \gamma^{(1)}\omega_2^{(1)}C_2^{(1)} - \gamma^{(2)}\omega_2^{(2)}C_2^{(2)} \tag{59}$$

$$0 = -\frac{m+M}{ml}\omega_1 C_1 + \gamma^{(1)}\omega_2^{(1)}C_2^{(1)} + \gamma^{(2)}\omega_2^{(2)}C_2^{(2)} \tag{60}$$

$$0 = \nu' + \omega_1 C_1 + \omega_2^{(1)}C_2^{(1)} + \omega_2^{(2)}C_2^{(2)} \tag{61}$$

$$0 = \nu' + \omega_1 C_1 - \omega_2^{(1)}C_2^{(1)} - \omega_2^{(2)}C_2^{(2)} \tag{62}$$

Resolviendo este sistema llegamos a que:

$$B_1 = C_1 = C_2^{(1)} = C_2^{(2)} = \nu' = 0$$

$$B_2^{(1)} = \frac{\Delta\gamma^{(2)}}{2\gamma^{(1)} - 2\gamma^{(2)}}$$

$$B_2^{(1)} = -\frac{\Delta\gamma^{(1)}}{2\gamma^{(1)} - 2\gamma^{(2)}}$$

$$\nu = \frac{\Delta}{2}$$

(g)

Análogo al punto anterior, debemos fijar las constantes B_i, C_i ν y ν' de la ecuación (50) con las condiciones iniciales que nos dan en este caso. Las mismas expresadas en función de η serán:

$$\eta_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{\eta}_0 = \begin{pmatrix} lv_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

Donde en la expresión para $\dot{\eta}_1 = \dot{\theta}_1 = lv_0$ usamos que la velocidad de la masa m de la izquierda descripta en coordenadas polares sólo tendrá componente angular pues $l = cte$.

Luego, con las condiciones iniciales de (63) llegamos al siguiente sistema de 8 incógnitas y 8 ecuaciones:

$$0 = -\frac{m+M}{ml}B_1 - \gamma^{(1)}B_2^{(1)} - \gamma^{(2)}B_2^{(2)} \tag{64}$$

$$0 = -\frac{m+M}{ml}B_1 + \gamma^{(1)}B_2^{(1)} + \gamma^{(2)}B_2^{(2)} \tag{65}$$

$$0 = \nu + B_1 + B_2^{(1)} + B_2^{(2)} \tag{66}$$

$$0 = \nu + B_1 - B_2^{(1)} - B_2^{(2)} \tag{67}$$

$$lv_0 = -\frac{m+M}{ml}\omega_1 C_1 - \gamma^{(1)}\omega_2^{(1)}C_2^{(1)} - \gamma^{(2)}\omega_2^{(2)}C_2^{(2)} \tag{68}$$

$$0 = -\frac{m+M}{ml}\omega_1 C_1 + \gamma^{(1)}\omega_2^{(1)}C_2^{(1)} + \gamma^{(2)}\omega_2^{(2)}C_2^{(2)} \tag{69}$$

$$0 = \nu' + \omega_1 C_1 + \omega_2^{(1)}C_2^{(1)} + \omega_2^{(2)}C_2^{(2)} \tag{70}$$

$$0 = \nu' + \omega_1 C_1 - \omega_2^{(1)}C_2^{(1)} - \omega_2^{(2)}C_2^{(2)} \tag{71}$$

Donde resolviendo el sistema obtenemos que:

$$B_1 = B_2^{(1)} = B_2^{(1)} = \nu = 0$$

$$C_1 = -\frac{l^2 m v_0}{2\omega_1(M+m)}$$

$$C_2^{(1)} = -\frac{lv_0}{2\omega_2^{(1)}(\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)})}$$

$$C_2^{(2)} = \frac{lv_0}{2\omega_2^{(2)}(\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)})}$$

$$\nu' = \frac{l^2 m v_0}{2(m+M)}$$