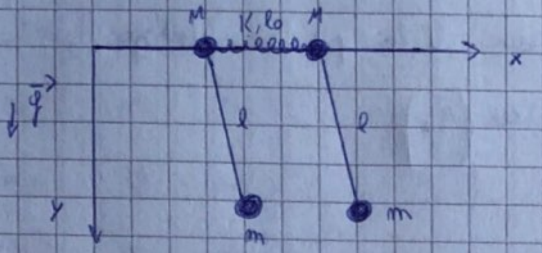
HOJA N°

FECHA

Entrega optativa guía 4: Pequeñas oscilaciones

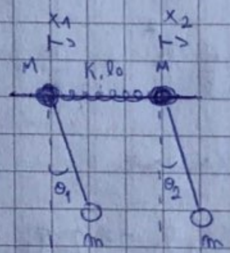
Dos partículas de masa M unidas por un resorte de longitud natural l_0 y constante K, se mueven enhebradas a un alambre horizontal recto. Cada partícula sostiene un péndulo de longitud l y masa m. Considerando el movimiento en el plano vertical (hay gravedad g)



Lagrangiano de pequeñas oscilaciones

a) Verifique las posiciones de equilibrio, y escriba el Lagrangiano de pequeñas oscilaciones. Exprese las matrices T y V

Rta: $\mathcal{L} = T - V$



Escribo la cinética primero:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m}{2}\left[(\dot{x}_1 + \dot{\theta}_1 l \cos\theta_1)^2 + (\dot{\theta}_1 l \sin\theta_1)^2\right]$$
$$+ \frac{m}{2}\left[(\dot{x}_2 + \dot{\theta}_2 l \cos\theta_2)^2 + (\dot{\theta}_2 l \sin\theta_2)^2\right]$$

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m}{2}\left[\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{\theta}_1 l\cos\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 l^2\right] + \frac{m}{2}\left[\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_2\dot{\theta}_2 l\cos\theta_2 + \dot{\theta}_2^2 l^2\right]$$

Y escribimos el potencial:

$$V = \frac{K}{2}\left(|x_2 - x_1| - l_0\right)^2 - mgl\cos\theta_1 - mgl\cos\theta_2$$

Como vamos a trabajar con pequeñas oscilaciones y el resorte tiene longitud natural l_0 podemos sacar el módulo de $|x_2 - x_1|$ ya que $x_2 > x_1$ en todo el problema

$$V = \frac{K}{2}\left(x_2 - x_1 - l_0\right)^2 - mgl\cos\theta_1 - mgl\cos\theta_2$$

Buscamos las posiciones de equilibrio:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -K(x_2 - x_1 - l_0) = 0 \Rightarrow x_{1eq} = x_{2eq} - l_0$$

Pedimos

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = K(x_2 - x_1 - l_0) = 0 \Rightarrow x_{2eq} = x_{1eq} + l_0$$

NOTA

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = mgl \sin\theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{1eq} = K\pi \quad \text{y como queremos un eq estable} \quad \theta_{1eq} = 0$$

Pstinns

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = mgl \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_{2eq} = 0$$

Entonces: $\eta_1 = x_1$ $\eta_2 = x_2 - l_0$ $\eta_3 = l\theta_1$ $\eta_4 = l\theta_2$

Primero aproximamos V a orden 2 alrededor de las posiciones de eq:

$$V = \frac{K}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 - mgl\cos\left(\frac{\eta_3}{l}\right) - mgl\cos\left(\frac{\eta_4}{l}\right)$$

$$\cos(\varepsilon) \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

alrededor del 0

$$\Rightarrow \quad V \approx \frac{K}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 - mgl\left[1 - \left(\frac{\eta_3}{l}\right)^2 \frac{1}{2}\right] - mgl\left[1 - \left(\frac{\eta_4}{l}\right)^2 \frac{1}{2}\right]$$

$$V \approx \frac{K}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{m}{2}\frac{g}{l}\eta_3^2 + \frac{m}{2}g\frac{\eta_4^2}{l} + V_0$$

Descartando los términos constantes:

$$V \approx \frac{1}{2}\left[K\eta_1^2 - K\eta_1\eta_2 - K\eta_2\eta_1 + K\eta_2^2 + m\frac{g}{l}\eta_3^2 + m\frac{g}{l}\eta_4^2\right]$$

Con lo que la matriz queda:

$$V = \begin{pmatrix} K & -K & 0 & 0 \\ -K & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{g}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m\frac{g}{l} \end{pmatrix}$$

y volviendo a la cinética:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m}{2}\left[\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{\theta}_1 l\cos\theta_1 + l^2\dot{\theta}_1^2\right] + \frac{m}{2}\left[\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_2\dot{\theta}_2 l\cos\theta_2 + \dot{\theta}_2^2 l^2\right]$$

y $\dot{\eta}_1 = \dot{x}_1$, $\dot{\eta}_2 = \dot{x}_2$, $\dot{\eta}_3 = l\dot{\theta}_1$, $\dot{\eta}_4 = l\dot{\theta}_2$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{M}{2}\dot{\eta}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2 + \frac{m}{2}\left[\dot{\eta}_1^2 + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_3\cos\left(\frac{\eta_3}{l}\right) + \dot{\eta}_3^2\right] + \frac{m}{2}\left[\dot{\eta}_2^2 + 2\dot{\eta}_2\dot{\eta}_4\cos\left(\frac{\eta_4}{l}\right) + \dot{\eta}_4^2\right]$$

y como los términos a los que hay correa ya son de orden dos tenemos que aproximar el coseno a orden cero: $\cos\left(\frac{\eta_3}{l}\right) \approx 1$ $\cos\left(\frac{\eta_4}{l}\right) \approx 1$

NOTA

$$\Rightarrow T \simeq \frac{M}{2}\dot{\eta}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2 + \frac{m}{2}\left[\dot{\eta}_1^2 + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_3 + \dot{\eta}_3^2\right] + \frac{m}{2}\left[\dot{\eta}_2^2 + 2\dot{\eta}_2\dot{\eta}_4 + \dot{\eta}_4^2\right]$$

$$T \simeq \frac{1}{2}\left[\dot{\eta}_1^2(M+m) + \dot{\eta}_2^2(M+m) + \dot{\eta}_3^2 m + \dot{\eta}_4^2 m + m\dot{\eta}_1\dot{\eta}_3 + m\dot{\eta}_3\dot{\eta}_1 + m\dot{\eta}_2\dot{\eta}_4 + m\dot{\eta}_4\dot{\eta}_2\right]$$

Con lo que la matriz queda:

$$T = \begin{pmatrix} M+m & 0 & m & 0 \\ 0 & M+m & 0 & m \\ m & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 0 & m \end{pmatrix}$$

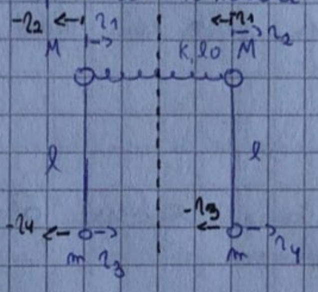
y el Lagrangiano:

$\mathcal{L} = T - V$ con T y V ya especificados.

Modos normales

b- Proponga el modo de frecuencia cero

R/: El problema presenta simetría especular:



Es decir, que reflejando bajo dicho plano:

$$\begin{cases} \eta_4' = -\eta_3 \\ \eta_3' = -\eta_4 \\ \eta_2' = -\eta_1 \\ \eta_1' = -\eta_2 \end{cases}$$

$$\vec{\eta}' = S\vec{\eta} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El Lagrangiano queda invariante ante esta simetría.

$$\mathcal{L}' = \frac{M}{2}\dot{\eta}_1'^2 + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2'^2 + \frac{m}{2}\left[\dot{\eta}_1'^2 + 2\dot{\eta}_1'\dot{\eta}_3' + \dot{\eta}_3'^2\right] + \frac{m}{2}\left[\dot{\eta}_2'^2 + 2\dot{\eta}_2'\dot{\eta}_4' + \dot{\eta}_4'^2\right]$$

$$- \frac{K}{2}(\eta_2' - \eta_1')^2 + \frac{m}{2}\frac{g}{l}\eta_3'^2 + \frac{m}{2}g\frac{\eta_4'^2}{l}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}' = \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2 + \frac{M}{2}\dot{\eta}_1^2 + \frac{m}{2}\left[\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_2\dot{\eta}_4 + \dot{\eta}_4\right] + \frac{m}{2}\left[\dot{\eta}_1^2 + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_3 + \dot{\eta}_3\right] - \frac{K}{2}(\eta_1 - \eta_2)^2 + \frac{m}{2}\frac{g}{l}\eta_4^2 + \frac{m}{2}\frac{g}{l}\eta_3^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}$$

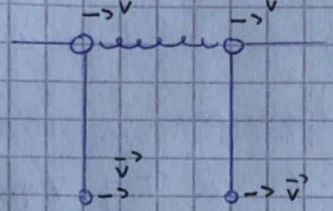
NOTA

Por lo tanto, como S cumple $\begin{cases} S = S^* & SVS = V \\ SS = I_d & STS = T \end{cases}$

sabemos que todos los autovectores $\vec{a}$ verifican

$$S\,\vec{a}_{\pm} = \pm\,\vec{a}_{\pm}$$

Sin embargo, primero propondremos como modo de frecuencia $\omega = 0$ el movimiento rígido:



es decir: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es claro que este modo verifica la condición de simetría o antisimetría con respecto al plano especular.

y además, ya sabemos que existe un modo de frecuencia cero, el problema para encontrar dicho modo se reduce a encontrar $\vec{a} \,/\, (V - 0T)\,\vec{a} = \vec{0}$

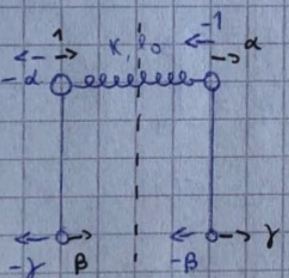
y por la forma de V es claro que $\vec{a}$ es el propuesto.

c) Proponga los otros modos normales haciendo uso de la simetría del problema. Use la ortogonalidad según la matriz T con el modo de frecuencia cero para verificar su propuesta.

Re: Haciendo uso de la condición encontrada para los modos normales:

$$S\,\vec{a}_{\pm} = \pm\,\vec{a}_{\pm}$$

Proponemos:



$\vec{a}$

$S\vec{a}$

es decir: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

y $S\vec{a} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -1 \\ -\gamma \\ -\beta \end{pmatrix}$

Como $S\vec{a} = \pm\vec{a}$: $\begin{pmatrix} -\alpha \\ -1 \\ -\gamma \\ -\beta \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

- En el caso simétrico: (+) $\quad \begin{aligned} -\alpha &= 1 \\ -1 &= \alpha \\ -\gamma &= \beta \\ -\beta &= \gamma \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$

~~y por la ortogonalidad de $\vec{a}$ con la matriz T:~~

- En el caso antisimétrico (−): $\quad \begin{aligned} -\alpha &= -1 \\ -1 &= -\alpha \\ -\gamma &= -\beta \\ -\beta &= -\gamma \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}$ si $\beta = 0$, es el modo de $\omega = 0$ ya hallado

NOTA

Por la ortogonalidad de los modos normales con respecto a T buscamos el otro modo antisimétrico

$$(1,1,0,0)\begin{pmatrix} M+m & 0 & m & 0 \\ 0 & M+m & 0 & m \\ m & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\beta\\\beta\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} M+m \\ M+m \\ m \\ m \end{pmatrix}} \; (M+m,\ M+m,\ m,\ m)\begin{pmatrix}1\\1\\\beta\\\beta\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$M+m + M+m + \beta m + \beta m = 0 \implies 2\beta m = -2(M+m)$$

$$\beta = -\frac{M+m}{m}$$

Entonces, el otro modo antisimétrico es

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{M+m}{m} \\ -\frac{M+m}{m} \end{pmatrix}$$

Usando simetría no podemos sacar más información sobre la simétrica.

d) Use la ecuación de autovectores para calcular las frecuencias de los modos normales y a su vez verifique que su propuesta es correcta.

Rta: sabemos que los $\vec{a}$ de los modos normales satisface:

$$(V - \omega^2 T)\,\vec{a} = 0$$ elegimos $\vec{a}$ como el del antisimétrico no nulo que encontramos:

$$\begin{pmatrix} K-\omega^2(M+m) & -K & -\omega^2 m & 0 \\ -K & K-\omega^2(M+m) & 0 & -\omega^2 m \\ -\omega^2 m & 0 & m\frac{g}{l}-\omega^2 m & 0 \\ 0 & -\omega^2 m & 0 & m\frac{g}{l}-\omega^2 m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{M+m}{m} \\ -\frac{M+m}{m} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} K-\omega^2(M+m) - K + \omega^2(M+m) = 0 \\ -K + K - \omega^2(M+m) + \omega^2(M+m) = 0 \\ -\omega^2 m - \frac{g}{l}(M+m) + \omega^2(M+m) = 0 \\ -\omega^2 m - \frac{g}{l}(M+m) + \omega^2(M+m) = 0 \end{cases}$$

(las dos primeras) se cumple; (las dos últimas) $\implies \omega^2 M - \frac{g}{l}(M+m) = 0$

$$\implies \boxed{\omega^2 = \frac{g}{l}\frac{M+m}{M}}$$

Entonces los dos modos antisimétricos nos quedará:

$\vec{a}_0 = (1,1,0,0)$ con $\omega = 0$ y $\vec{a}_1 = \left(1, 1, -\frac{M+m}{m}, -\frac{M+m}{m}\right)$ con $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{M+m}{M}}$

Ahora trabajando con los modos simétricos:

$$\begin{pmatrix} K-\omega^2(M+m) & -K & -\omega^2 m & 0 \\ -K & K-\omega^2(M+m) & 0 & -\omega^2 m \\ -\omega^2 m & 0 & m\frac{g}{l}-\omega^2 m & 0 \\ 0 & -\omega^2 m & 0 & m\frac{g}{l}-\omega^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\left.\begin{aligned} &K-\omega^2(M+m)+K-\omega^2\beta m = 0 \\ &-K-K+\omega^2(M+m)+\omega^2\beta m = 0 \end{aligned}\right\} \text{son la misma ec}$$

$$\left.\begin{aligned} &-\omega^2 m+\beta m\frac{g}{l}-\beta\omega^2 m = 0 \\ &\omega^2 m-\beta m\frac{g}{l}+\beta\omega^2 m = 0 \end{aligned}\right\} \text{son la misma ec}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2K-\omega^2(M+m+\beta m) = 0 \\ \omega^2(m+\beta m)-\beta m\frac{g}{l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2K &= \omega^2(M+m+\beta m) \\ +\beta m\frac{g}{l} &= \omega^2(m+\beta m) \end{aligned}$$

Dividiendo ambas: $\frac{2Kl}{\beta m g} = \frac{M+m+\beta m}{m+\beta m} \Rightarrow 2Klm+2Klm\beta = (M+m+\beta m)\beta m g$

$$2Klm+2Klm\beta = \beta m g(M+m)+\beta^2 m^2 g \Rightarrow \beta^2+\beta\left(\frac{M+m}{m}-\frac{2Kl}{mg}\right)-\frac{2Kl}{mg}$$

$$\Rightarrow \beta_{1,2} = \frac{Kl}{mg}-\frac{M+m}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{g(M+m)-2Kl}{mg}\right)^2+\frac{8Kl}{mg}}$$

$$\beta_{1,2} = \frac{2Kl-g(M+m)}{2mg} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[g(M+m)-2Kl]^2+8Klmg}{(mg)^2}} = \frac{2Kl-g(M+m) \pm \sqrt{[g(M+m)-2Kl]^2+8Klmg}}{2mg}$$

$$y \quad \omega^2 = \frac{\beta m g}{l}\frac{1}{m(1+\beta)} = \frac{\beta}{1+\beta}\frac{g}{l}$$

Por lo que los modos simétricos son:

$\vec{a}_3 = (1,-1,\beta_1,-\beta_1)$ con $\beta_1 = \frac{2Kl-g(M+m)+\sqrt{[g(M+m)-2Kl]^2+8Klmg}}{2mg}$ y $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{\beta_1}{1+\beta_1}}$

y

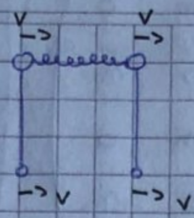
$\vec{a}_4 = (1,-1,\beta_2,-\beta_2)$ con $\beta_2 = \frac{2Kl-g(M+m)-\sqrt{[g(M+m)-2Kl]^2+8Klmg}}{2mg}$ y $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{\beta_2}{1+\beta_2}}$

además es claro que $\beta_1 > 0$ y $\beta_2 < 0$

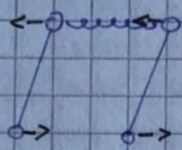
Por lo que cualitativamente los modos son:

NOTA

Los antisimétricos:

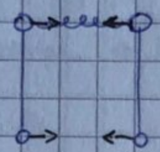


$\omega_0 = 0$

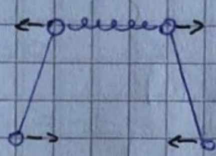


$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{l}\dfrac{M+m}{M}}$

Los simétricos:



$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\sqrt{\dfrac{\beta_1}{1+\beta_1}}$



$\omega_3 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\sqrt{\dfrac{\beta_2}{1+\beta_2}}$

Solución general y coordenadas normales

e) Escriba la solución general del problema y exprese las coordenadas normales ξ_j en función de los pequeños desplazamientos η_k

R: La solución general es una combinación lineal de los 4 modos de oscilación:

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(A+Bt) + C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{M+m}{m} \\ -\frac{M+m}{m} \end{pmatrix}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + D\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta_1 \\ -\beta_1 \end{pmatrix}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + E\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta_2 \\ -\beta_2 \end{pmatrix}\cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

Con $A, B, C, D, E, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ constantes a determinar con las condiciones iniciales y las coordenadas normales $\vec{\xi}$ son $\vec{\xi} = A^T T \vec{\eta}$ con A la matriz de autovectores

$$\Rightarrow \vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -\left(\frac{M+m}{m}\right) & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & -\left(\frac{M+m}{m}\right) & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M+m & 0 & m & 0 \\ 0 & M+m & 0 & m \\ m & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix}$$

NOTA

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\left(\frac{M+m}{m}\right) & -\left(\frac{M+m}{m}\right) \\ 1 & -1 & \beta_1 & -\beta_1 \\ 1 & -1 & \beta_2 & -\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M+m & 0 & m & 0 \\ 0 & M+m & 0 & m \\ m & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} M+m & M+m & m & m \\ 0 & 0 & -M & -M \\ M+m+\beta_1 m & -M-m-\beta_1 m & m+\beta_1 m & -m-\beta_1 m \\ M+m+\beta_2 m & -M-m-\beta_2 m & m+\beta_2 m & -m-\beta_2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = (M+m)(\eta_1+\eta_2) + m(\eta_3+\eta_4) \\ \xi_2 = -M(\eta_3+\eta_4) \\ \xi_3 = (M+m+\beta_1 m)(\eta_1-\eta_2) + (m+\beta_1 m)(\eta_3-\eta_4) \\ \xi_4 = (M+m+\beta_2 m)(\eta_1-\eta_2) + (m+\beta_2 m)(\eta_3-\eta_4) \end{cases}$$

F) Resuelva el problema cuando se estira el resorte a un monto Δ y se lo suelta manteniendo los péndulos verticales (sin velocidad inicial)

Rta: Las condiciones iniciales son $\eta_{1_0} = -\frac{\Delta}{2}$, $\eta_{2_0} = \frac{\Delta}{2}$, $\eta_{3_0} = 0$, $\eta_{4_0} = 0$

$\dot{\eta}_{1_0} = 0$, $\dot{\eta}_{2_0} = 0$, $\dot{\eta}_{3_0} = 0$, $\dot{\eta}_{4_0} = 0$

y

$$\vec{\eta}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\left(\frac{M+m}{m}\right) \\ -\left(\frac{M+m}{m}\right) \end{pmatrix} C \cos\varphi_1 + D \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta_1 \\ -\beta_1 \end{pmatrix} \cos\varphi_2 + E \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta_2 \\ -\beta_2 \end{pmatrix} \cos\varphi_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1)\ A + C\cos\varphi_1 + D\cos\varphi_2 + E\cos\varphi_3 = -\Delta/2 \\ 2)\ A + C\cos\varphi_1 - D\cos\varphi_2 - E\cos\varphi_3 = \Delta/2 \\ 3)\ -\left(\frac{M+m}{m}\right) C\cos\varphi_1 + D\beta_1\cos\varphi_2 + E\beta_2\cos\varphi_3 = 0 \\ 4)\ -\left(\frac{M+m}{m}\right) C\cos\varphi_1 - D\beta_1\cos\varphi_2 - E\beta_2\cos\varphi_3 = 0 \end{cases}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

y $\dot{\vec{q}} = B\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - C\,\omega_1\begin{pmatrix}1\\1\\-\left(\frac{m+M}{M}\right)\\-\left(\frac{m+M}{M}\right)\end{pmatrix}\sin(\omega_1 t+\varphi_1) - D\,\omega_2\begin{pmatrix}1\\-1\\\beta_1\\-\beta_1\end{pmatrix}\sin(\omega_2 t+\varphi_2) - E\,\omega_3\begin{pmatrix}1\\-1\\\beta_2\\-\beta_2\end{pmatrix}\sin(\omega_3 t+\varphi_3)$

Por lo que $\dot{\vec{q}}(0) = \begin{pmatrix} 5)\; B - C\omega_1\sin\varphi_1 - D\,\omega_2\sin\varphi_2 - E\,\omega_3\sin\varphi_3 \\ 6)\; B - C\,\omega_1\sin\varphi_1 + D\,\omega_2\sin\varphi_2 + E\,\omega_3\sin\varphi_3 \\ 7)\; C\left(\frac{m+M}{M}\right)\omega_1\sin\varphi_1 - D\beta_1\omega_2\sin\varphi_2 - E\,\omega_3\,\beta_2\sin\varphi_3 \\ 8)\; C\left(\frac{m+M}{M}\right)\omega_1\sin\varphi_1 + D\,\omega_2\beta_1\sin\varphi_2 + E\,\omega_3\,\beta_2\sin\varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Queda un sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas.

$(1)+(2) \rightarrow \quad A = -C\cos\varphi_1$

$(1)-(2) \rightarrow \quad D\cos\varphi_2 + E\cos\varphi_3 = -\Delta$

$(3)+(4) \rightarrow \quad C\cos\varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=0}$ y o $C=0$ o $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}(2n-1)$

$(3)-(4) \rightarrow \quad D\beta_1\cos\varphi_2 = -E\,\beta_2\cos\varphi_3 \quad \Rightarrow \quad D\cos\varphi_2 = -E\,\frac{\beta_2}{\beta_1}\cos\varphi_3$

$\Rightarrow \quad E\cos\varphi_3\left(1-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = -\Delta$

$(5)+(6) \rightarrow \quad B = C\,\omega_1\sin\varphi_1$

$(5)-(6) \rightarrow \quad D\,\omega_2\sin\varphi_2 = -E\,\omega_3\sin\varphi_3$

$(7)+(8) \rightarrow \quad C\sin\varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C=0} \Rightarrow \boxed{B=0}$

$(7)-(8) \rightarrow \quad D\,\beta_1\,\omega_2\sin\varphi_2 = -E\,\omega_3\,\beta_2\sin\varphi_3$

Entonces, falta determinar D, E, φ_2 y φ_3 y tenemos:

$$E\cos\varphi_3\left(1-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = -\Delta$$

$$D\,\omega_2\sin\varphi_2 = -E\,\omega_3\sin\varphi_3$$

$D\,\beta_1\,\omega_2\sin\varphi_2 = -E\,\omega_3\,\beta_2\sin\varphi_3 \quad \rightarrow \quad D\,\omega_2\sin\varphi_2 = -E\,\omega_3\,\frac{\beta_2}{\beta_1}\sin\varphi_3$

$\Rightarrow \quad -E\,\omega_3\,\frac{\beta_2}{\beta_1}\sin\varphi_3 + E\,\omega_3\sin\varphi_3 = 0$

$E\,\omega_3\sin\varphi_3\left(1-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad E\sin\varphi_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$ o $\varphi_3 = n\pi$

~~Esto pasaría sino~~ si $E=0 \Rightarrow D\cos\varphi_2 = 0 \Rightarrow 0 = -\Delta$ abs! $\Rightarrow \boxed{\varphi_3 = n\pi}$

NOTA

Recopilando la la informació que ya obtenim. $A=0$, $B=0$, $C=0$, $\varphi_3 = n\pi$

$$\Rightarrow D \sin\varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \quad o \quad \varphi_2 = n\pi$$

si $D=0 \Rightarrow E=0 \Rightarrow \Delta = 0$ abs!

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_2 = n\pi}$$

Con esto las 8 ec de condicions inicials queden:

$$\begin{cases} D\cos(n\pi) + E\cos(k\pi) = -\Delta/2 \\ D\,\beta_1\cos(n\pi) + E\,\beta_2\cos(k\pi) = 0 \end{cases}$$

~~si n y k es tal que~~ $\cancel{\cos(n\pi) = -\cos(k\pi) = 1}$

$$D\cos(n\pi) = -\frac{\Delta}{2} - E\cos(k\pi)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\Delta}{2}\beta_1 + E\cos(k\pi)\left(\beta_2 - \beta_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad E\cos(k\pi) = \frac{\Delta}{2}\,\frac{\beta_1}{\beta_2-\beta_1}$$

$$\Rightarrow \quad D\cos(n\pi) = -\frac{\Delta}{2}\,\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1} = \cancel{\frac{\Delta}{2}\,\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}}$$

Tomamos k y $n = 0$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{\eta}(t) = -\frac{\Delta}{2}\,\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\\beta_1\\-\beta_1\end{pmatrix}\cos(\omega_2 t) + \frac{\Delta}{2}\,\frac{\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\\beta_2\\-\beta_2\end{pmatrix}\cos(\omega_3 t)}$$

g) Resuelve el problema cuando se le dá a la masa m de la izquierda una velocidad inicial horizontal v_0.

Rq: Las ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} A + C\cos\varphi_1 + D\cos\varphi_2 + E\cos\varphi_3 = 0 \\ A + C\cos\varphi_1 - D\cos\varphi_2 - E\cos\varphi_3 = 0 \\ -\left(\frac{M+m}{m}\right)C\cos\varphi_1 + D\beta_1\cos\varphi_2 + E\beta_2\cos\varphi_3 = 0 \\ -\left(\frac{M+m}{m}\right)C\cos\varphi_1 - D\beta_1\cos\varphi_2 - E\beta_2\cos\varphi_3 = 0 \\ B - C\omega_1\sin\varphi_1 - D\omega_2\sin\varphi_2 - E\omega_3\sin\varphi_3 = 0 \\ B - C\omega_1\sin\varphi_1 + D\omega_2\sin\varphi_2 + E\omega_3\sin\varphi_3 = 0 \\ \left(\frac{M+m}{m}\right)C\omega_1\sin\varphi_1 - D\beta_1\omega_2\sin\varphi_2 - E\omega_3\beta_2\sin\varphi_3 = v_0 \\ \left(\frac{M+m}{m}\right)C\omega_1\sin\varphi_1 + D\beta_1\omega_2\sin\varphi_2 + E\omega_3\beta_2\sin\varphi_3 = 0 \end{cases}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

y resolviendo el sistema computacionalmente (pero no siendo muy seguro) queda:

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{v_0}{2} \frac{m}{M+m} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{M+m}{m} \\ -\frac{M+m}{m} \end{pmatrix} \left(-\frac{v_0}{2\omega_1} \frac{m}{M+m} \right) \sin(\omega_1 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta_1 \\ -\beta_1 \end{pmatrix} \left(\frac{v_0}{2\beta_1 \omega_2 - 2\beta_2 \omega_2} \right) \sin(\omega_2 t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta_2 \\ -\beta_2 \end{pmatrix} \left(-\frac{v_0}{2\beta_1 \omega_3 - 2\beta_2 \omega_3} \right) \sin(\omega_3 t)$$

NOTA