

Choque:

A)

Sean 2 esferas que impactan en un choque elástico como se ve en la figura 1

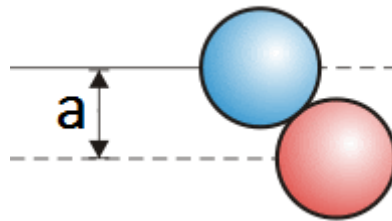


Figura 1: Esquema de colisión entre 2 esferas con parametro de impacto  $a$ .

Si nos paramos en un sistema ubicado en el centro de masas, podemos describir la interacción como realizada por una Fuerza impulsiva que se aplica en un intervalo de tiempo infinitesimal  $\tau$ , a una distancia  $a$  del origen.

Podemos describir entonces la dinámica de este sistema a partir de las ecuaciones de Newton:

$$F(t) = M_{total} \dot{V}_{cm} = \dot{P} \quad (1)$$

$$a \times F(t) = \dot{L}_{cm}$$

De esta forma podemos usar ambas expresiones de la ec.(1) para hallar la relación entre estas dos magnitudes.

$$a \times \frac{dP}{dt} = \frac{dL_{cm}}{dt} \longrightarrow \int a \times dP = \int dL_{cm}$$
$$a \times \Delta P = \Delta L_{cm} \quad (2)$$

## Pelota Super-elástica:

B)

Sea una esfera maciza de masa  $M$  y radio  $R$ , con una velocidad inicial  $V_x = V_0$  y  $V_y = -V_0$ , como se indica en la Figura 2.

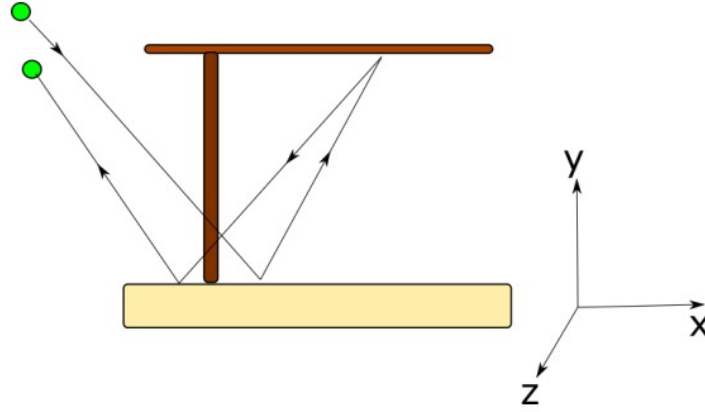


Figura 2: Esquema de esfera super-elástica con 3 rebotes.

Siendo que la pelota no desliza al chocar con las superficies, podemos utilizar la expresión de la ec.2 y la Conservación de la Energía Cinética para determinar las velocidades de traslación y rotación resultantes de cada impacto.

Para esto se puede analizar dos situaciones por separado, primero viendo el caso de una esfera con velocidad inicial  $V_{x0} = V_0$  y  $\omega_0 = 0$ , y luego el caso de  $V_{x0} = 0$  y  $\omega_0 \neq 0$  (siempre con velocidad  $|V_y| = V_0$ ).

$$B.1) V_{x0} = V_0 \quad , \quad V_{y0} = -V_0 \quad , \quad \omega_0 = 0$$

Dado que el choque es elástico, y tanto el piso como el techo se consideran de masa mucho mayor a  $M$ , sabemos que la velocidad en el eje  $\hat{y}$  se invertirá en cada impacto, por lo que no entrará en el análisis.

Utilizando la ec.2 y la Conservación de la Energía Cinética tenemos 2 ecuaciones:

$$\mathbf{R} \times \Delta \mathbf{P} = \mathbf{R} \times M(\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_0) = I\omega = \Delta L_{cm} \quad (3)$$

$$\frac{M}{2}V_0^2 = \frac{M}{2}V_f^2 + \frac{I}{2}\omega^2 \quad (4)$$

Donde  $I$  es el momento de inercia con origen en el centro de masa,  $V_0$  y  $V_f$  las velocidades inicial y final en el eje  $\hat{x}$  respectivamente. Si despejamos  $\omega$  en la ec.(3) y reemplazamos en la ec.(4) obtenemos las ecuaciones 5 y 6

$$\omega = \frac{M}{I}R(V_f - V_0) \quad (5)$$

$$0 = V_f^2\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right) - 2V_0V_f + V_0^2\left(1 - \frac{I}{MR^2}\right) \quad (6)$$

De este polinomio de grado 2 despejamos 2 valores para  $V_f$ .

$$V_{f1} = V_0 \quad \quad V_{f2} = V_0 \frac{MR^2 - I}{MR^2 + I}$$

Si observamos los resultados, si usamos  $V_{f1}$  obtendríamos que  $\omega = 0$ , lo cual implica un choque de una esfera sin rugosidad alguna, es decir, que rebota deslizando sobre la superficie. El otro resultado es el que nos importa, y que usamos para reemplazar en ec.(5) para obtener el valor de  $\omega$  resultante. Además podemos reemplazar  $I$  por su valor para una esfera maciza ( $I = MR^2/2$ ).

$$V_f = V_0 \frac{3}{7} \longrightarrow R\omega = -V_0 \frac{10}{7} \quad (7)$$

B.2)  $V_{x0} = 0$  ,  $V_{y0} = -V_0$  ,  $\omega_0 \neq 0$

En este otro caso la esfera rebota sin velocidad inicial en el eje  $\hat{x}$ , pero si con velocidad de rotación inicial  $\omega_0$ .

Utilizando la ec.2 y la Conservación de la Energía Cinética tenemos 2 ecuaciones:

$$\mathbf{R} \times \Delta \mathbf{P} = \mathbf{R} \times M(V_f) = I(\omega - \omega_0) = \Delta L_{cm} \quad (8)$$

$$\frac{I}{2}\omega_0^2 = \frac{M}{2}V_f^2 + \frac{I}{2}\omega^2 \quad (9)$$

Si despejamos  $V_f$  en la ec.(8) y reemplazamos en la ec.(9) junto con el valor de  $I$ , obtenemos las ecuaciones 10 y 12

$$V_f = \frac{2R}{5}(\omega - \omega_0) \quad (10)$$

$$0 = 7\omega^2 - 4\omega_0\omega - 3\omega_0^2 \quad (11)$$

De este polinomio de grado 2 despejamos 2 valores para  $\omega$ .

$$\omega_1 = \omega_0 \quad \omega_2 = -\frac{3}{7}\omega_0$$

Nuevamente, si usamos  $\omega_1$  obtendríamos que  $\omega = \omega_0$ , lo cual implica un choque de una esfera deslizando sobre la superficie. El otro resultado es el que usamos para reemplazar en ec.(10) para obtener el valor de  $V_f$  resultante.

$$\omega = -\frac{3}{7}\omega_0 \longrightarrow V_f = -R\frac{4}{7}\omega_0 \quad (12)$$

De este modo podemos sintetizar los resultados obtenidos en una ecuación matricial que relaciona los valores de  $V_f$  y  $\omega$  obtenidos para una combinación arbitraria de condiciones iniciales  $V_0$  y  $\omega_0$ .

$$\begin{pmatrix} V_f \\ R\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ R\omega_0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

C)

Si tenemos el caso de una esfera rebotando entre 2 superficies separadas por una altura  $h$ , con velocidades iniciales  $V_{x0} = V_0$ ,  $V_{y0} = -V_0$ ,  $\omega_0 = 0$ , podemos utilizar la ec.(16) para calcular las velocidades resultantes en módulo y dirección para un caso como el de la Figura 2. Para simplificar el análisis cualitativo tomaremos la condición de  $gh \ll V_0^2$ , donde  $g$  es la constante de aceleración por la gravedad, de modo que no la incluiremos en el análisis como hicimos en el inciso B), por lo que las velocidades resultantes para un choque serán las mismas que las iniciales para el choque siguiente.

Además, por simplicidad, describiremos los choques siempre tomando la pared/techo por debajo de la esfera, para lo cual acomodaremos la velocidad angular y así podremos usar siempre la matriz del inciso B), obteniendo el módulo de  $\omega$  y acomodando para el caso real.

C.1) Choque 1:  $V_{x0} = V_0$  ,  $V_{y0} = -V_0$  ,  $\omega_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} V_{f1} \\ R\omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}V_0 \\ -\frac{10}{7}V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

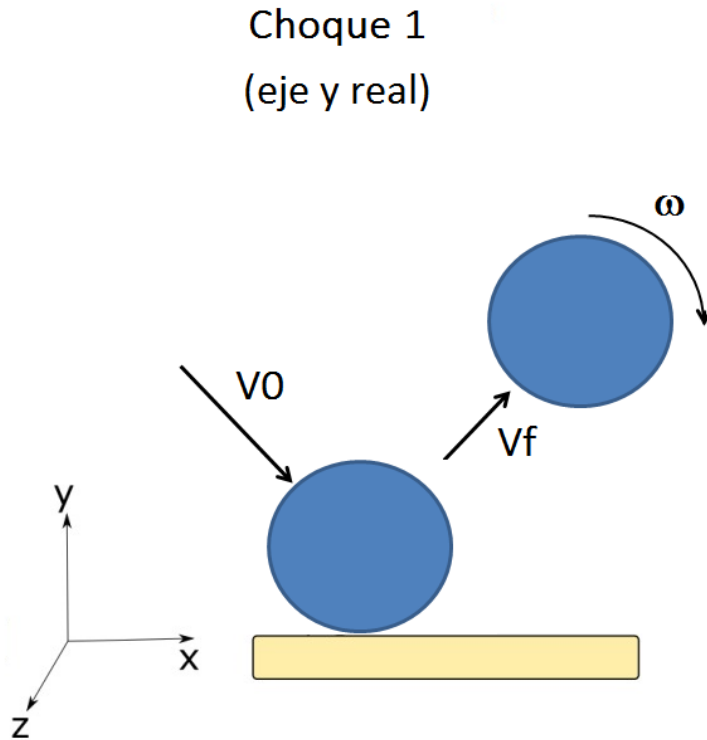


Figura 3: Primer Choque, sin inversión de eje  $\hat{y}$ .

C.2) Choque 2:  $V_{x0} = \frac{3}{7}V_0$  ,  $V_{y0} = -V_0$  ,  $\omega_0 = \frac{10}{7} \frac{V_0}{R}$

Para este segundo choque hemos invertido el sentido del eje  $\hat{y}$  por lo que se obtuvieron los valores citados.

$$\begin{pmatrix} V_{f2} \\ R\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{31}{49}V_0 \\ -\frac{60}{49}V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7}V_0 \\ \frac{10}{7}V_0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

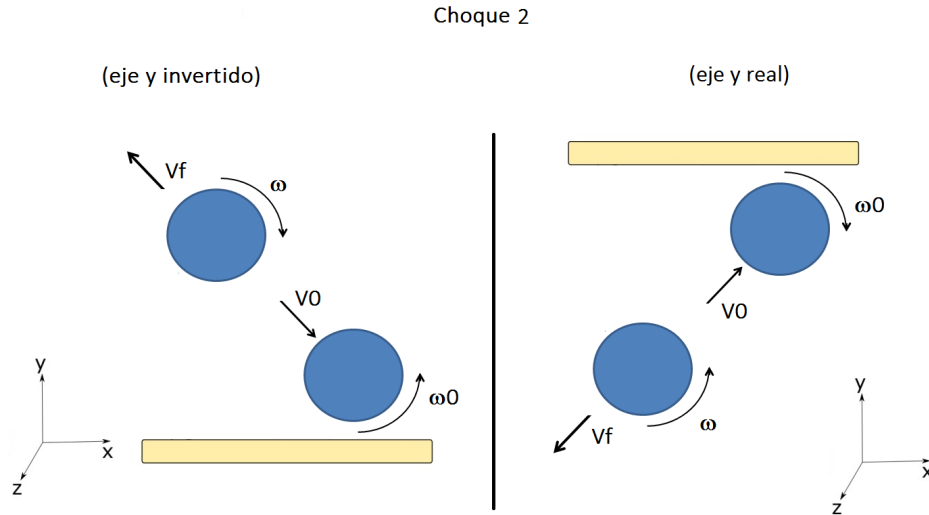


Figura 4: Segundo Choque, con inversión de eje  $\hat{y}$ .

C.3) Choque 3:  $V_{x0} = -\frac{31}{49}V_0$  ,  $V_{y0} = -V_0$  ,  $\omega_0 = \frac{60}{49}\frac{V_0}{R}$

$$\begin{pmatrix} V_{f3} \\ R\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{333}{343}V_0 \\ \frac{130}{343}V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{31}{49}V_0 \\ \frac{60}{49}V_0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Choque 3

(eje y real)

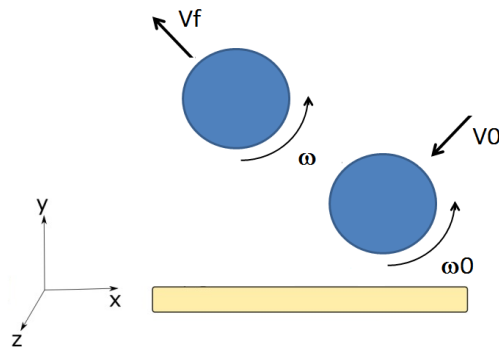


Figura 5: Tercer Choque, sin inversión de eje  $\hat{y}$ .

Por último, habiendo obtenido los valores de velocidad en el eje  $\hat{x}$  luego de cada choque, podemos verificar que la trayectoria sugerida en la Figura 2 es correcta, dado que tenemos:

$$\begin{aligned}V_{x0} &= V_0 \\V_{x1} &= \frac{3}{7}V_0 \simeq 0,43V_0 \\V_{x2} &= -\frac{31}{49}V_0 \simeq -0,63V_0 \\V_{x3} &= -\frac{333}{343}V_0 \simeq -0,97V_0\end{aligned}$$

Si observamos los módulos, luego del primer rebote se alejará en sentido positivo una cantidad menor que la que se alejará luego del segundo rebote, en sentido negativo (suponiendo que las velocidades son mucho mayores que  $gh$ , por lo que no contemplamos el desvío producido por la gravedad), y luego del tercer rebote ascenderá con una pendiente levemente mayor que la inicial al comenzar el lanzamiento. En el primer y segundo rebote, la velocidad en  $x$  es positiva, y tomando como sistema de referencia al indicado en la figura 3, como se tira la pelota en sentido positivo al eje  $x$ , y luego del primer rebote la pelota se aleja. En el segundo rebote la velocidad en  $x$  cambia su signo acercándose.