Entrega guía 5

Nicolás Fische y Ariel Rojas

Octubre 2021

1. Fuerzas impulsivas (de choque)

1.1. Inciso a

Sabemos por las ecuaciones de Newton que la fuerza aplicada es

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) \tag{1}$$

Y además, el torque es

$$\frac{d\mathbf{L_{cm}}}{dt} = \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{2}$$

Como $\mathbf{a}$ es fijo durante el choque, la ecuación anterior se puede reescibir como

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L_{cm}}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{p}) \tag{3}$$

Por lo tanto, se cumple para todo tiempo que

$$\mathbf{L_{cm}}(t) = \mathbf{a} \times \mathbf{p}(t) + \mathbf{C} \tag{4}$$

con $\mathbf{C}$ un vector constante en el tiempo. Si conocemos el valor del impulso angular del centro de masas para dos tiempos t_a y t_b, podemos calcular la variación del impulso restando estas ecuaciones, obteniendo:

$$\Delta\mathbf{L_{cm}} = \mathbf{L_{cm}}(t_b) - \mathbf{L_{cm}}(t_a) = \mathbf{a} \times [\mathbf{p}(t_b) - \mathbf{p}(t_a)] = \mathbf{a} \times \Delta\mathbf{p} \tag{5}$$

donde $\tau = t_b - t_a$ es el tiempo que dura el choque.

2. Pelota súper-elástica

2.1. Inciso b

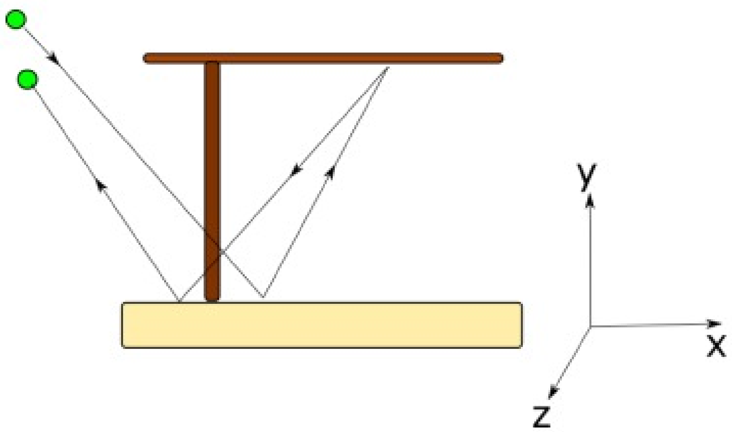

Figura 1: Pelota saltarina con tres rebotes

Como la pelota se mueve en el plano $x - y$, la velocidad angular, y por lo tanto el momento angular, deben ser perpendiculares a este plano, por lo que el momento angular se puede escribir vectorialmente como

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = I\omega\hat{z} \tag{6}$$

mientras que la posición del punto de aplicación de la fuerza de choque se escribe desde el centro de masa (coincidente con el centro geométrico de la pelota) como

$$\vec{a} = -R\hat{y} \tag{7}$$

y el impulso lineal es

$$\vec{p} = m(v_x\hat{x} + v_y\hat{y}) \tag{8}$$

Utilizaremos la notación sin primar para referirse a las magnitudes antes del choque y primada para las magnitudes después del mismo, de modo que $\Delta\omega = \omega' - \omega$, $\Delta v_x = v'_x - v_x$ y $\Delta v_y = v'_y - v_y = 0$, ya que el módulo de la velocidad vertical es el mismo antes y después del choque.

Además, por la relación derivada en el inciso (a), tenemos que

$$\Delta\vec{L} = I\Delta\omega\hat{z} = \vec{a} \times \Delta\vec{p} = -R\hat{y} \times m\Delta v_x\hat{x} = Rm\Delta v_x\hat{z} \tag{9}$$

que reemplazando por el momento de inercia de una esfera maciza calculado en sus ejes principales, es decir, $I = \frac{2}{5}mR^2$, nos queda

$$\frac{2}{5}mR^2(\omega' - \omega) = Rm(v_x' - v_x) \tag{10}$$

Por otro lado, al conservarse la energía tenemos que

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2) + \frac{1}{2}I\omega'^2 = E' \tag{11}$$

donde usamos que la diferencia de energía potencial es 0 porque el choque ocurre en $y = 0$, es decir, empieza y termina a esa altura.

Luego, cancelando los términos de la masa y la velocidad vertical $v_y = v_y'$ y reemplazando por el momento de inercia obtenemos

$$v_x^2 + \frac{2}{5}R^2\omega^2 = v_x'^2 + \frac{2}{5}R^2\omega'^2 \tag{12}$$

que, junto con la ecuación (10) nos da un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas v_x' y ω':

$$\begin{cases} v_x' - v_x &= \frac{2}{5}(R\omega' - R\omega) \\ v_x'^2 - v_x^2 &= \frac{2}{5}[(R\omega)^2 - (R\omega')^2] \end{cases} \tag{13}$$

Factorizando las diferencias de cuadrados y cancelando términos a ambos lados se obtiene

$$v_x' = -R\omega - R\omega' - v_x \tag{14}$$

que al igualar a la primera ecuación de la (13) permite obtener

$$R\omega' = -\frac{10}{7}v_x - \frac{3}{7}R\omega \tag{15}$$

Luego, reemplazando por ejemplo en la primera ecuación se obtiene

$$v_x' = \frac{3}{7}v_x - \frac{4}{7}R\omega \tag{16}$$

que escrito en forma matricial resulta

$$\begin{pmatrix} v_x' \\ R\omega' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ R\omega \end{pmatrix} \tag{17}$$

2.2. Inciso c

Para el primer choque, evaluamos la ecuación 17 en las condiciones iniciales $\omega = 0$, $v_x = v_0$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} v_x' \\ R\omega' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}v_0 \\ -\frac{10}{7}v_0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Usando que $v_0^2 >> gh$ se puede asumir una trayectoria recta (en lugar de una parábola) y podemos utilizar la misma matriz que antes pero teniendo en cuenta que ahora $\mathbf{a} = R\hat{y}$, por lo que, cambiando R por -R, obtenemos

$$\begin{pmatrix} v_x'' \\ R\omega'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{31}{49}v_0 \\ \frac{60}{49}v_0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

En el tercer choque volvemos a tener $\mathbf{a} = -R\hat{y}$, por lo que volvemos a cambiar R por -R con respecto al choque anterior. Las magnitudes nos quedan

$$\begin{pmatrix} v_x''' \\ R\omega''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{333}{343}v_0 \\ \frac{130}{343}v_0 \end{pmatrix} \tag{20}$$