Mecánica Analítica - 2°C 2021
Cuerpo Rígido - Parte A

Link, Tomás J.; Vargas, Camila L.
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

(20 de Octubre, 2021)

I. ENUNCIADO

a) Demuestre que $\mathbf{\Delta L_{CM}} = \mathbf{a} \times \mathbf{\Delta p}$ usando las ecuaciones de Newton.
b) Sea una pelota saltarina (rugosa y elástica) de masa m y radio R que es arrojada en un plano vertical $x - y$. La pelota rebota en el piso elásticamente. Hallar las relaciones entre las velocidades justo antes y justo después del choque.
c) Muestre que según el resultado de b), luego de tres rebotes (piso, debajo de una superficie horizontal elevada en h, y piso), la pelota vuelve hacia la dirección del que la tira. Calcule las velocidades horizontales y angulares luego de cada rebote.

II. RESOLUCIÓN

A. Fuerzas impulsivas

Las ecuaciones de Newton nos dicen que

$$\mathbf{F}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t), \qquad \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{CM}}(t) = \mathbf{a} \times \mathbf{F}(t)$$

Reemplazando la primera en la segunda, e integrando para un tiempo τ de corta duración, tenemos

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{CM}} \mathrm{dt} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} (\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{p}}) \mathrm{dt}$$
$$\mathbf{L_{CM}}(t_0 + \tau) - \mathbf{L_{CM}}(t_0) = \mathbf{a} \times [\mathbf{p}(t_0 + \tau) - \mathbf{p}(t_0)]$$

o bien

$$\boxed{\mathbf{\Delta L_{CM}} = \mathbf{a} \times \mathbf{\Delta p}} \tag{1}$$

B. Relación entre las velocidades antes y después del choque

La componente en $\hat{y}$ de $\mathbf{\Delta p}$ se anula en el producto vectorial con el vector de aplicación $\mathbf{a} = \mathbf{R}$ (punto de contacto con el piso), ya que éste también siempre está en la dirección $\hat{y}$. Por lo tanto, de la ecuación (1) podemos afirmar que:

$$\Delta L_{CM} = R \Delta p_x$$

Además, suponiendo que $|v_y|$ no cambia durante el rebote, podemos ignorarla al plantear la conservación de la energía cinética. Luego, de aquí en más todas las velocidades (no angulares) serán en la dirección $\hat{x}$.

Para una esfera se tiene que $L = I\omega$, entonces:

$$I(\omega_d - \omega_a) = mR(v_d - v_a) \tag{2}$$

donde usamos los índices a y d para referir a las velocidades *antes* y *después* del choque.

Por otra parte, como el choque es elástico, podemos plantear la conservación de la energía cinética:

$$\frac{m}{2}v_a^2 + \frac{I}{2}\omega_a^2 = \frac{m}{2}v_d^2 + \frac{I}{2}\omega_d^2$$

que se puede reescribir como:

$$-m(v_d - v_a)(v_d + v_a) = I(\omega_d - \omega_a)(\omega_d + \omega_a) \tag{3}$$

Dividiendo la ecuación (3) por la ecuación (2) se tiene que [1]:

$$R(\omega_d + \omega_a) = -(v_d + v_a) \tag{4}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que para una esfera el momento de inercia es $I = \alpha m R^2$, se puede reescribir la ecuación (2) como

$$\alpha R(\omega_d - \omega_a) = v_d - v_a \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5) forman un sistema lineal que se puede resolver para ω_d y v_d. Sumándolas se obtiene que

$$R\omega_d = \frac{1}{\alpha+1}\left[-2v_a + (\alpha-1)R\omega_a\right] \tag{6}$$

y sustituyendo esta última ecuación en (4),

$$v_d = \frac{1}{\alpha+1}\left[(1-\alpha)v_a - 2\alpha R\omega_a\right] \tag{7}$$

Este resultado se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} v_d \\ R\omega_d \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha+1}\begin{pmatrix} 1-\alpha & -2\alpha \\ -2 & \alpha-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_a \\ R\omega_a \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que para el caso particular de una esfera **uniforme** ($\alpha = 2/5$), se tiene que

$$\boxed{\begin{pmatrix} v_d \\ R\omega_d \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_a \\ R\omega_a \end{pmatrix}} \tag{8}$$

C. Tres rebotes sucesivos

Usaremos la ecuación (8) para calcular las velocidades luego de cada rebote. Para un primer rebote en el piso con $\omega_{1a} = 0$ y $v_{1a} = v_0$ se tiene:

$$\boxed{v_{1d} = \frac{3}{7}v_0} \qquad \boxed{\omega_{1d} = -\frac{10}{7}\frac{v_0}{R}}$$

Para el segundo rebote en la parte inferior de una superficie horizontal elevada una altura h [2], tomamos un sistema de coordenadas invertido que nos permita utilizar la ecuación (8). Es decir que $v_{2a} = -v_{1d}$ y $\omega_{2a} = \omega_{1d}$ (como si fuese también el piso pero la bola viniese del otro lado). De esta manera, se obtiene (en el sistema de coordenadas del primer rebote):

$$\boxed{v_{2d} = -\frac{31}{49}v_0} \qquad \boxed{\omega_{2d} = \frac{60}{49}\frac{v_0}{R}}$$

Para el tercer rebote, tomando $v_{3a} = v_{2d}$ y $\omega_{3a} = \omega_{2d}$, obtenemos

$$\boxed{v_{3d} = -\frac{333}{343}v_0} \qquad \boxed{\omega_{3d} = \frac{130}{343}\frac{v_0}{R}}$$

Es decir que la pelota vuelve con una velocidad horizontal aproximadamente 3 % inferior a la inicial.

---

[1] En este paso descartamos la solución trivial $\omega_d = \omega_a$, $v_d = v_a$, que corresponde al movimiento sin fricción con la superficie.

[2] En el cálculo se desprecia el efecto de la gravedad considerando que $v_0^2 \gg gh$, es decir la energía potencial despreciable con respecto a la cinética.