Ejercicio 17 Guía 5

Autor: Vladimir D. Rodríguez Chariarse

1. Solución del Problema 17

1.1. (a) Conservación de la componente radial de L_O

Planteamos la ecuación de Newton para la variación del momento angular con respecto al punto fijo O:

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\tau}_O$$

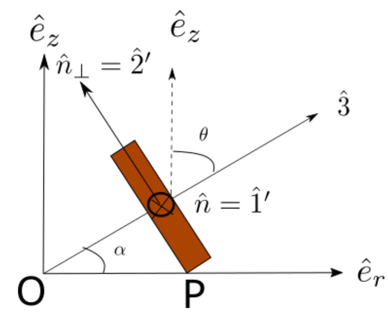

Figura 1

Las fuerzas aplicadas en O no producen torque con respecto a O. Calculemos el torque del peso, $-mg\hat{z}$, aplicado en el centro de masas que dista una distancia d de O sobre el eje del trompo, y el torque de la fuerza de reacción del piso, $\mathbf{R} = R_r\hat{e}_r + R_\varphi\hat{+}e_\varphi + R_z\hat{e}_z$, que en principio consideramos posee tres componentes y se aplica a la distancia D del punto O (en el punto de contacto P). La componente vertical es la conocida fuerza de reacción normal ($R_z = N$), la componente tangente a la curva del punto de contacto es la fuerza de rozamiento ($R_\varphi = f_{rz}$), la componente radial (R_r) sumada a una componente aplicada en el punto O evita el movimiento del centro de masas en la dirección radial.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_O &= d\hat{3} \times (-mg\hat{e}_z) + D\hat{e}_r \times \mathbf{R} && (1) \\ &= mgd\cos\alpha\hat{e}_\varphi + DR_\varphi\hat{e}_z - DR_z\hat{e}_\varphi && (2) \end{aligned}$$

Verificamos que el torque no posee componente $\hat{e}_r$ (a lo largo de OP)

$$\frac{d(\mathbf{L}_O \cdot \hat{e}_r)}{dt} = 0$$

Por lo que $\mathbf{L}_O \cdot \hat{e}_r$ se conserva.

1.2. (b) Cálculo de la velocidad angular en rodadura

Calculemos la componente radial del momento angular con respecto a O, antes y después de que pasa a rodar sin deslizar.

1.2.1. $\mathbf{L}_O$ antes

Usamos que $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0 \hat{3}$, que es un eje principal del cuerpo (eje de simetría, se desprecia precesión y nutación de trompo pesado) por lo que

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{I} \cdot \Omega_0 \hat{3}$$

de donde obtenemos

$$\mathbf{L}_O \cdot \hat{e}_r = I_3 \Omega_0 \cos\alpha$$

1.2.2. $\mathbf{L}'_O$ después

Usamos que el cuerpo empieza a rodar sin deslizar, por lo que la dirección de la velocidad angular ha cambiado a $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{e}_r$, que descompuesta en ejes principales $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \cos\alpha \hat{3} - \Omega \sin\alpha \hat{2}'$, pues por simetría $\hat{2}'$ es un eje principal del cuerpo. El momento angular es

$$\mathbf{L}'_O = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'_O \cdot \hat{e}_r &= I_3 \Omega \cos\alpha \; \hat{3} \cdot \hat{e}_r - I\Omega \sin\alpha \; \hat{2}' \cdot \hat{e}_r && (3) \\ &= \Omega (I_3 \cos^2\alpha + I \sin^2\alpha) && (4) \end{aligned}$$

Por lo que Ω es constante de movimiento luego de que empieza a rodar sin deslizar.

1.2.3. Cálculo de Ω

Usando la conservación de $\mathbf{L}_O \cdot \hat{y}$ obtenemos

$$\Omega = \frac{I_3 \cos\alpha}{I_3 \cos^2\alpha + I \sin^2\alpha} \, \Omega_0$$

1.3. (c) Ecuaciones de Euler

Habiendo tomado al eje de simetría del cuerpo como el eje $\hat{3}$, podemos identificar al eje de nodos como la intersección del plano perpendicular a eje $\hat{3}$ con el plano espacial $x - y$, de donde $\hat{n} = \hat{e}_\varphi$. Por consiguiente el ángulo de Euler ϕ es el que hace el eje de nodo $\hat{n}$ con el eje espacial x. El ángulo de Euler θ es el ángulo entre el eje $\hat{3}$ y el eje espacial z, en este caso $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, es constante.

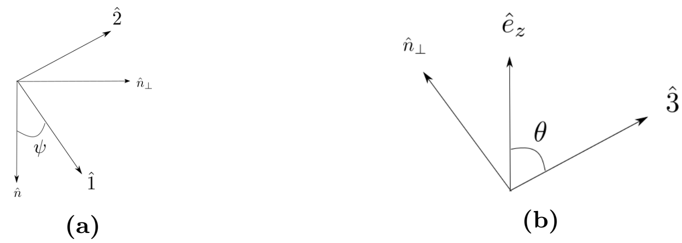

Figura 2: *(a) Vectores en el planos* $\hat{1}-\hat{2}$. *(b) Vectores en el plano* $\hat{3}-\hat{e}_z$

1.3.1. Cálculo del torque con respecto a O

Usaremos la expresión (2) pero en término de los ejes fijos al cuerpo. Para ello expresamos los versores $\hat{n}$ (eje de nodos) y $\hat{n}_\perp$ (perpendicular a $\hat{n}$ en el plano $\hat{1}-\hat{2}$) en función de los ejes fijos al cuerpo. Usando el plano perpendicular al eje $\hat{3}$,

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \cos\psi\hat{1} - \sin\psi\hat{2}\\ \hat{n}_\perp &= \cos\psi\hat{2} + \sin\psi\hat{1}\end{aligned}$$

Usando el plano $\hat{3}-\hat{e}_z$,

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \sin\theta\hat{3} - \cos\theta\hat{n}_\perp\\ \hat{e}_z &= \cos\theta\hat{3} + \sin\theta\hat{n}_\perp\end{aligned}$$

usando estas relaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}\tau_3 =& DR_\varphi\cos\theta\\ \tau_1 =& DR_\varphi\sin\theta\sin\psi + (mgd\sin\theta - DR_z)\cos\psi\\ \tau_2 =& DR_\varphi\sin\theta\cos\psi - (mgd\sin\theta - DR_z)\sin\psi\end{aligned}$$

1.3.2. Cálculo de $\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}|_c$

En este problema $\dot{\theta}=0$ y tenemos

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\psi}\hat{3} = (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\hat{3} + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi\hat{2} + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi\hat{1}$$

Por rodadura $\mathbf{\Omega}\times\hat{\mathbf{e_r}} = \mathbf{0}$ de donde sale que $\Omega\cdot\hat{e_z} = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta = 0$, por lo que

$$\dot{\psi} = -\frac{\dot{\phi}}{\cos\theta} = -\frac{\dot{\phi}}{\sin\alpha}$$

Obteniendo para $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\phi}\left(-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\hat{3} + \cos\alpha\cos\psi\hat{2} + \cos\alpha\sin\psi\hat{1}\right)$$

Calculemos el módulo del vector $\mathbf{\Omega}$ que es constante de movimiento por lo visto en el inciso (a).

$$\Omega = \dot{\phi} \cot \alpha$$

por lo que se deduce que $\dot{\phi}$ es constante. Entonces

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}|_c = \dot{\phi}\dot{\psi}(-\cos\alpha \sin\psi \hat{2} + \cos\alpha \cos\psi \hat{1}) = -\dot{\phi}^2 \cot\alpha(-\sin\psi \hat{2} + \cos\psi \hat{1})$$

Las ecuaciones de Euler para el caso simétrico son:

$$I\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I)\Omega_2\Omega_3 = \tau_1 \tag{5}$$

$$I\dot{\Omega}_2 - (I_3 - I)\Omega_1\Omega_3 = \tau_2 \tag{6}$$

$$I_3\dot{\Omega}_3 = \tau_3 \tag{7}$$

Remplazando las expresiones anteriores se obtienen las ecuaciones de Euler en el sistema de ejes fijos al cuerpo. Esta parte se deja a les alumnes.

Dado que conocemos las velocidades constantes $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$, las ecuaciones sólo establecen relaciones para las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

En particular, usando la componente en la dirección $\hat{3}$ tenemos:

$$0 = DR_\varphi \sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad R_\varphi = F_{rz} = 0$$

Por lo que la fuerza de rozamiento es nula en rodadura horizontal.

Se puede pedir a les alumnes que escriban las ecuaciones de Euler en el sistema $\{\hat{1}', \hat{2}', \hat{3}\}$ (equivale a hacer $\psi = 0$ en las ecuaciones anteriores).

1.4. (d) Período de precesión

El período de precesión del eje $\hat{3}$ del trompo es:

$$\tau = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\Omega} \cot\alpha$$

si α es pequeño, el período aumenta, lo cual es razonable de esperar.