

Ejercicios 8 y 11 Guía 5

Autor: Vladimir D. Rodríguez Chariarse

1. Breve introducción teórica

Este problema es interesante para identificar los ángulos de Euler, luego de una elección de ejes principales (en este caso necesariamente fijos al cuerpo). El ángulo θ de Euler es el que hace el eje $\hat{3}$ con el eje espacial \hat{z} . El eje de nodos en la intersección del plano $\hat{1} - \hat{2}$ (perpendicular al eje $\hat{3}$) con el plano espacial $x - y$. El ángulo ϕ de Euler es el que hace el eje de nodos \hat{n} con el plano $x - y$. Se rota un ángulo θ alrededor del eje de nodos. Finalmente se rota en ψ alrededor del eje $\hat{3}$.

Para expresar la velocidad angular Ω componemos las tres velocidades angulares:

$$\Omega = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\psi}\hat{3}$$

En muchos casos es posible encontrar fácilmente las proyecciones $\Omega_i, i = 1, 2, 3$, en forma alternativa se puede recurrir a la fórmula ya obtenida.

La velocidad del centro de masa se puede obtener, usando coordenadas cartesianas o polares y encontrando o usando las velocidades correspondientes. Alternativamente, si se conoce la velocidad de un punto P en el cuerpo rígido se puede usar el campo de velocidades:

$$\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_P + \Omega \times (\mathbf{r}_{CM} - \mathbf{r}_P)$$

La energía potencial (típicamente gravitatoria) se calcula usando la coordenada z_{CM} .

Finalmente el Lagrangiano se escribe:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}v_{CM}^2 + \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2) - mgz_{CM}$$

2. Solución del Problema 8

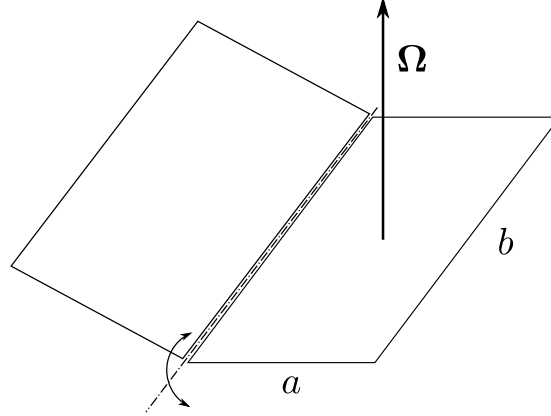


Figura 1: *Dos placas articuladas, una de ellas horizontal, rotando con velocidad angular Ω constante.*

La primera placa sólo aporta una energía cinética y potencial constantes, por lo cual la ignoramos en el Lagrangiano. Elegimos el eje $\hat{3}$ perpendicular al plano de la segunda placa, el eje $\hat{2}$ perpendicular al lado b y saliente, con lo que el eje $\hat{1} = \hat{2} \times \hat{3}$ queda definido.

En este caso es conveniente usar en lugar del ϕ de Euler el φ del CM en cilíndricas. Ambos se relacionan mediante: $\phi = \varphi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{\phi} = \dot{\varphi}$ como no varían las velocidades usaremos ϕ en lugar de φ (sólo importante para la simulación). En la figura por ejemplo es claro que el ángulo de Euler $\phi = 0$, mientras que el $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Por vínculo $\dot{\phi} = \omega$ y $\dot{\psi} = 0$, siendo el eje de nodos la bisagra que une las placas.

$$\Omega = \omega \hat{z} + \dot{\theta} \hat{n}$$

usando que $\hat{n} = \hat{1}$ y que $\hat{z} = \cos \theta \hat{3} + \sin \theta \hat{2}$:

$$\Omega = \dot{\theta} \hat{1} + \omega \sin \theta \hat{2} + \omega \cos \theta \hat{3}$$

2.1. Energía cinética de traslación del CM

Es posible identificar la velocidad del CM como suma de dos velocidades perpendiculares:

$$\mathbf{v}_{CM} = -\frac{a}{2}(1 + \cos \theta) \omega \hat{1} + \frac{a}{2} \dot{\theta} \hat{3}$$

Por consiguiente la energía de traslación del CM queda:

$$T_{CM} = \frac{m a^2}{2} \frac{1}{4} \left((1 + 2 \cos \theta + \cos^2(\theta) \omega^2 + \dot{\theta}^2) \right)$$

2.2. Energía cinética de rotación alrededor del CM

Usaremos el caso de placas delgadas:

$$I_1 = \frac{m}{12}a^2 \quad I_2 = \frac{m}{12}b^2 \quad I_3 = I_1 + I_2 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

con lo que usando la velocidad Ω hallada:

$$T_{rot} = \frac{m}{2} \frac{1}{12} \left(a^2 \dot{\theta}^2 + b^2 \omega^2 + a^2 \omega^2 \cos^2(\theta) \right)$$

2.3. Sin gravedad

En este caso el Lagrangiano es la energía cinética:

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ma^2\omega^2 \cos^2(\theta) + \frac{1}{4}ma^2\omega^2 \cos \theta$$

Notemos que ma^2 se puede factorizar por lo que el movimiento es independiente de m y de a . La ecuación de movimiento para θ queda sin el factor común ma^2 :

$$\frac{\ddot{\theta}}{3} = -\omega^2 \left(\frac{\sin(2\theta)}{6} + \frac{\sin \theta}{4} \right)$$

2.3.1. Conservación del Hamiltoniano

Como el Lagrangiano no depende del tiempo se conserva el Hamiltoniano. Pero en este caso la energía cinética no es función cuadrática homogénea, por lo que deberemos calcular explícitamente el Hamiltoniano:

$$H = \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} = \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{6}ma^2\omega^2 \cos^2(\theta) - \frac{1}{4}ma^2\omega^2 \cos \theta$$

que podemos expresarlo como:

$$\frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta) = H \quad V_{eff}(\theta) = -\frac{1}{6}ma^2\omega^2 \cos^2(\theta) - \frac{1}{4}ma^2\omega^2 \cos \theta$$

Podemos ver que los valores de equilibrio hallados corresponden a valores extremos del potencial efectivo $V_{eff}(\theta)$. En el caso de equilibrio estable $V_{eff}(\theta)$ es mínimo, en el caso de equilibrio inestable $V_{eff}(\theta)$ es un máximo.

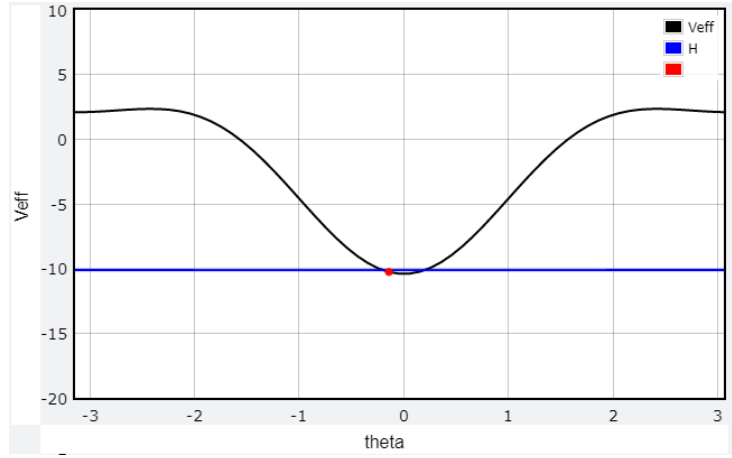


Figura 2: Forma funcional del potencial efectivo sin gravedad. El equilibrio estable es en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. En $\theta = 2,41$ hay un máximo.

2.4. Con gravedad

En este caso el Lagrangiano es la energía cinética menos la potencial $V(\theta) = mg\frac{a}{2} \sin \theta$:

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ma^2\omega^2 \cos^2(\theta) + \frac{1}{4}ma^2\omega^2 \cos \theta - mg\frac{a}{2} \sin \theta$$

Notemos que m se puede factorizar por lo que el movimiento es independiente de m . La ecuación de movimiento para θ queda sin el factor común m :

$$\frac{\ddot{\theta}}{3} = -\omega^2 \left(\frac{\sin(2\theta)}{6} + \frac{\sin \theta}{4} \right) + \frac{g}{2a} \cos \theta$$

2.4.1. Conservación del Hamiltoniano

Como el Lagrangiano no depende del tiempo se conserva el Hamiltoniano. Pero en este caso la energía cinética no es función cuadrática homogénea, por lo que deberemos calcular explícitamente el Hamiltoniano, basta con agregar el potencial gravitatorio al caso anterior.

$$H = \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} = \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{6}ma^2\omega^2 \cos^2(\theta) - \frac{1}{4}ma^2\omega^2 \cos \theta + mg\frac{a}{2} \sin \theta$$

que podemos expresarlo como:

$$\frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta) = H \quad V_{eff}(\theta) = -\frac{1}{6}ma^2\omega^2 \cos^2(\theta) - \frac{1}{4}ma^2\omega^2 \cos \theta + mg\frac{a}{2} \sin \theta$$

Podemos ver que los valores de equilibrio hallados corresponden a valores extremos del potencial efectivo $V_{eff}(\theta)$. En el caso de equilibrio estable $V_{eff}(\theta)$ es mínimo, en el caso de equilibrio inestable $V_{eff}(\theta)$ es un máximo. La gravedad desplaza el mínimo de $\theta = 0$ a un valor negativo. El potencial efectivo no es simétrico alrededor de $\theta = 0$.

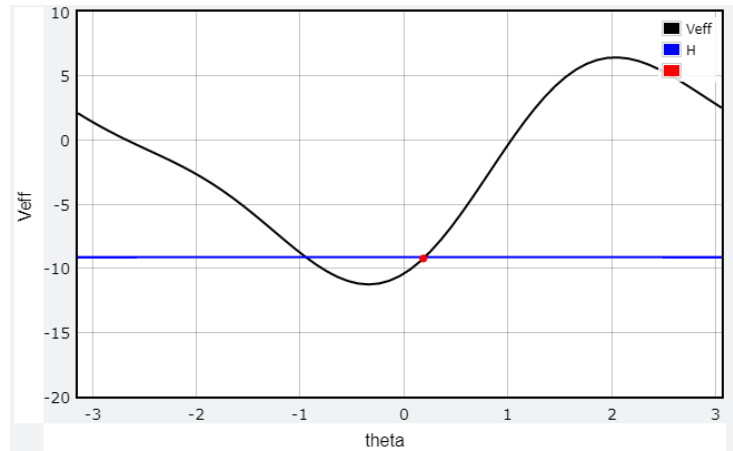


Figura 3: Forma funcional del potencial efectivo con gravedad. El equilibrio estable se desplaza hacia menores valores de $\theta = 0$

3. Solución del Problema 11

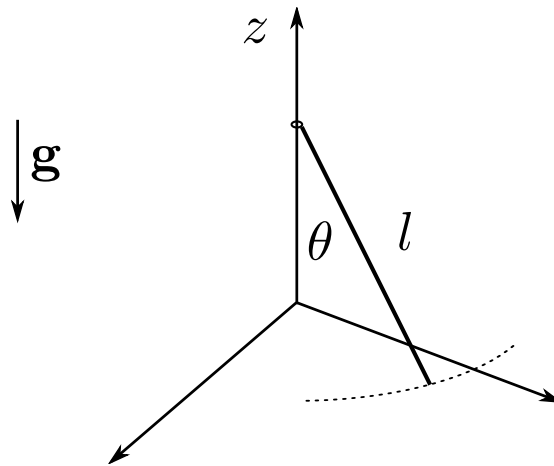


Figura 4: Una varilla rota y desliza sobre el plano con un punto sobre el eje z .

Una elección de coordenadas del problema son: θ (en el dibujo) y φ , la coordenada polar del punto de la barra en contacto con en el plano. Si elegimos

el eje $\hat{3}$ de la barra a lo largo de la misma, el eje de nodos lo elegimos $\hat{n} = -\hat{e}_\varphi$. Al ser una varilla delgada, no tenemos en cuenta una posible rotación alrededor del eje $\hat{3}$ por lo que ψ no es una coordenada del problema. Finalmente $\hat{2} = \hat{3} \times \hat{1}$.

En este caso es conveniente usar en lugar del ϕ de Euler el φ del CM en cilíndricas ya mencionado. Ambos se relacionan mediante:

$$\varphi = \phi + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \dot{\varphi}$$

En la figura por ejemplo es claro que el ángulo de Euler $\phi = 0$, mientras que el $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Como no varían las velocidades usaremos la notación $\dot{\phi}$ en lugar de $\dot{\varphi}$ (sólo importante para la simulación).

Usamos la expresión

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{n}$$

teniendo en cuenta que $\hat{n} = \hat{1}$ y que $\hat{z} = \cos \theta \hat{3} + \sin \theta \hat{2}$:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\theta} \hat{1} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{2} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{3}$$

3.1. Energía cinética de traslación del CM

Para evaluar la velocidad del *CM* usamos el campo de velocidades (P es el punto de la barra en contacto con el eje z):

$$\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_P + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r}_{CM} - \mathbf{r}_P)$$

teniendo en cuenta que $z_P = l \cos \theta$ y $\mathbf{r}_{CM} - \mathbf{r}_P = -\frac{l}{2} \hat{3}$, obtenemos

$$\mathbf{v}_P = -l \sin \theta \dot{\theta} (\cos \theta \hat{3} + \sin \theta \hat{2})$$

$$\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r}_{CM} - \mathbf{r}_P) = -\frac{l}{2} (\dot{\theta} \hat{1} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{2} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{3}) \times \hat{3} = -\frac{l}{2} \dot{\phi} \sin \theta \hat{1} + \frac{l}{2} \dot{\theta} \hat{2}$$

finalmente

$$\mathbf{v}_{CM} = -\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\phi} \hat{1} + \frac{l}{2} \underbrace{(1 - 2 \sin^2(\theta))}_{\cos 2\theta} \dot{\theta} \hat{2} - l \underbrace{\sin \theta \cos \theta}_{\frac{\sin 2\theta}{2}} \hat{3}$$

Por consiguiente la energía de traslación del *CM* queda:

$$T_{CM} = \frac{m}{2} \frac{l^2}{4} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \right)$$

3.2. Energía cinética de rotación alrededor del CM

Los momentos principales de inercia de la barra son:

$$I_1 = \frac{m}{12} l^2 \quad I_2 = \frac{m}{12} l^2 \quad I_3 = 0$$

con lo que usando la velocidad $\mathbf{\Omega}$ hallada:

$$T_{rot} = \frac{m}{2} \frac{l^2}{12} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \right)$$

4. Magnitudes conservadas

En este caso el Lagrangiano es la energía cinética menos el potencial gravitatorio $V = mg\frac{l}{2} \cos \theta$

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{6}(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) - \frac{mgl}{2} \cos \theta$$

4.1. Momento angular en \hat{z}

Dado que \mathcal{L} no depende del ϕ se conserva $p_\phi = L_z$:

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{ml^2}{3} \sin^2(\theta)\dot{\phi} = L_z$$

usando las condiciones iniciales del problema ($\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\phi}_0 = \omega_0$), $L_z = \frac{ml^2}{6}\omega_0$ y podemos obtener:

$$\dot{\phi} = \frac{3L_z}{ml^2 \sin^2(\theta)} \implies \Omega_z = \frac{\omega_0}{2 \sin^2(\theta)}$$

notar que como es usual, si θ aumenta, ω_z disminuye.

4.2. Energía

Dado que \mathcal{L} no depende del tiempo se conserva el Hamiltoniano H , que en este caso, puesto que T es cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas $H = T + V = E$:

$$\frac{ml^2}{6}(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) + \frac{mgl}{2} \cos \theta = E$$

Notar que la energía constante para las condiciones iniciales del problema es:

$$E = \frac{ml^2}{12}\omega_0^2 + \frac{mgl}{4}\sqrt{2}$$

4.3. Potencial efectivo

Usando el valor de $\dot{\phi}$ obtenido en la conservación de la energía

$$\frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta) = E \quad V_{eff}(\theta) = \frac{1}{24 \sin^2(\theta)}\omega_0^2 + \frac{mgl}{2} \cos \theta$$

de donde se puede despejar $\dot{\theta}^2$:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\omega_0^2}{2} + \frac{3\omega_g^2}{2}\sqrt{2} - 3\omega_g^2 \cos \theta - \frac{1}{4 \sin^2(\theta)}\omega_0^2$$

donde hemos definido: $\omega_g^2 = \frac{g}{l}$. Como verificación, esta expresión satisface $\dot{\theta} = 0$ si $\theta = \frac{\pi}{4}$.

4.4. Ecuaciones de Lagrange

Calculemos primero las ecuaciones de Lagrange (para ambas coordenadas pues se lo usa en la simulación):

ϕ :

$$\sin 2\theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \sin^2(\theta) \ddot{\phi} = 0$$

θ :

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\theta} = \frac{ml^2}{12} \frac{\omega_0^2}{\sin^3(\theta)} + \frac{mgl}{2} \sin \theta$$

factorizando $\frac{ml^2}{3}$ y usando: $\omega_g^2 = \frac{g}{l}$

$$\ddot{\theta} = \frac{\cos \theta}{4 \sin^3(\theta)} \omega_0^2 + \frac{3}{2} \omega_g^2 \sin \theta$$

4.5. Cálculo de la fuerza normal en el punto de contacto con el piso

Usemos la ecuación de Newton para el movimiento de la coordenada z del CM :

$$m \ddot{z}_{CM} = N - mg$$

como $z_{CM} = \frac{l}{2} \cos \theta$

$$\dot{z}_{CM} = -\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta} \quad \implies \quad \ddot{z}_{CM} = -\frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta}^2 - \frac{l}{2} \sin \theta \ddot{\theta}$$

de donde

$$\frac{N(\theta)}{ml} = \omega_g^2 - \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta}^2 - \frac{l}{2} \sin \theta \ddot{\theta}$$

luego de un poco de álgebra obtenemos:

$$\frac{4N(\theta)}{ml} = \omega_g^2 (9 \cos^2(\theta) - 3\sqrt{2} \cos \theta + 1) - \omega_0^2 \cos \theta$$

Lo primero que podemos preguntarnos es cual es el valor máximo de ω_0 para que la barra no se despegue del piso en el instante inicial. Usando $\theta = \frac{\pi}{4}$ obtenemos que

$$\frac{4N(\frac{\pi}{4})}{ml} = \frac{5}{2} \omega_g^2 - \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} > 0 \quad \implies \quad \omega_0 < \sqrt{\frac{5\sqrt{2}}{2}} \omega_g$$

Ahora si buscamos el valor mínimo de ω_0 para el cual se despegue del suelo, buscaremos el mínimo de $N(\theta)$ y lo tomaremos como cero.

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} = 0 \quad \implies \quad \cos \theta_0 = \frac{\omega_0^2 + 3\sqrt{2}\omega_g^2}{18\omega_g^2}$$

Finalmente evaluamos la normal en este θ_0 y lo igualamos a 0.

$$N(\theta_0) = 0$$

obteniendo

$$\omega_0 > \sqrt{6 - 3\sqrt{2}}\omega_g \sim 1,325\omega_g$$

y el valor θ_0 para el cual se despega es:

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 \sim 1,23$$