

TP 5 (b)

Marcos Val, Leandro Figueroa

Noviembre 2021

(a) Para calcular los momentos de inercia del sistema respecto del punto medio del eje primero vamos a definir nuestros ejes principales de la siguiente forma:

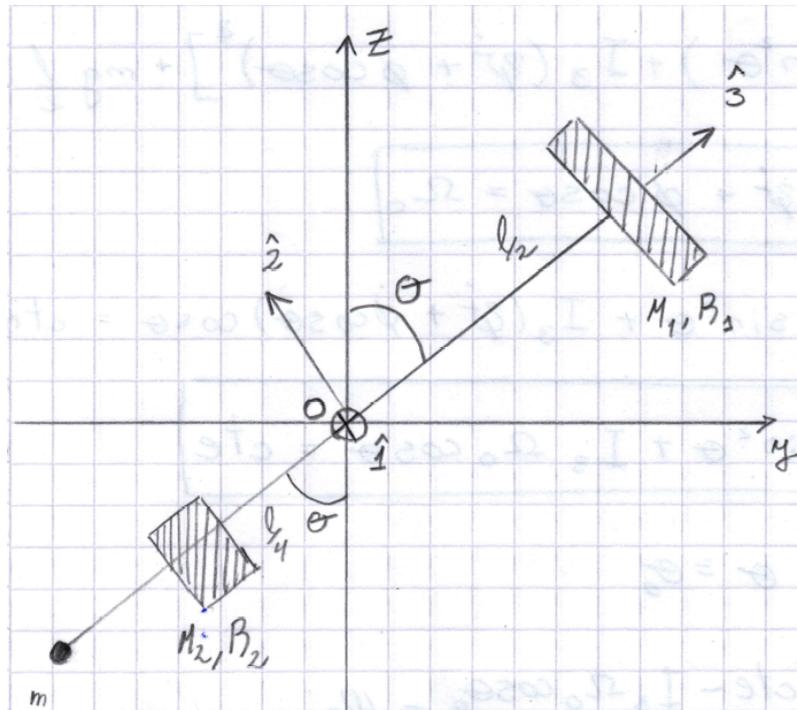


Figure 1: Representación del sistema con los ejes principales

Podemos calcular los momentos de inercia de cada objeto respecto del punto "O" usando el teorema de Steiner

Para la masa 1:

$$I_{1M_1}^{(O)} = I_{1M_1}^{(CM)} + M_1 \left(|\vec{a}|^2 - a_1^2 \right) \quad (1)$$

Donde el momento de inercia de un disco es conocido

$$I_{1M_1}^{(CM)} = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 \quad (2)$$

$$\vec{a} = \vec{r}_O - \vec{r}_{CM} = -\frac{\ell}{2} \hat{3} \quad (3)$$

Reemplazando todo en (1)

$$I_{1M_1}^{(O)} = M_1 \left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{\ell^2}{4} \right) \quad (4)$$

De forma analoga para M_2 y m

$$I_{1M_2}^{(O)} = M_2 \left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{\ell^2}{16} \right) = M_1 \left(R_2^2 + \frac{\ell^2}{8} \right) \quad (5)$$

$$I_{1m}^{(O)} = m \frac{\ell^2}{4} \quad (6)$$

Por lo tanto sumando cada termino obtenemos I :

$$I = M_1 \left(\frac{R_1^2}{2} + R_2^2 + \frac{3}{8} \ell^2 \right) + m \frac{\ell^2}{4} \quad (7)$$

Repitiendo el proceso para I_3 se obtiene (lo unico que hay que tener en cuenta es que el término a_3 no va a ser nulo como en el caso anterior):

$$I = M_1 \left(\frac{R_1^2}{2} + R_2^2 \right) \quad (8)$$

(b) Sabemos que la expresión de la energía cinética se simplifica si la expresamos desde el punto O (solo va a haber energía cinética de rotación)

$$T = T^{(O)} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \bar{I} \vec{\Omega} \quad (9)$$

Donde

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{1} + \dot{\psi} \hat{3} \quad (10)$$

como $\hat{z} = \sin\theta \hat{2} + \cos\theta \hat{3}$ Podemos reescribir (10) de la siguiente forma:

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \hat{1} + \dot{\phi} \sin\theta \hat{2} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \hat{3} \quad (11)$$

Por lo tanto la energía cinética:

$$T^{(O)} = \frac{1}{2} \left[I \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 \right] \quad (12)$$

Por otro lado la energía potencial es:

$$V = M_1 g \frac{\ell}{2} \cos \theta - M_2 g \frac{\ell}{4} \cos \theta - mg \frac{\ell}{2} \cos \theta = -mg \frac{\ell}{2} \cos \theta \quad (13)$$

(c) Con esto podemos escribir el lagrangiano del sistema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[I \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 \right] + mg \frac{\ell}{2} \cos \theta \quad (14)$$

De aqui podemos obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \Omega_0 \quad (15)$$

$$I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \Omega_0 \cos \theta = cte \quad (16)$$

$$I \ddot{\theta} = I \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \Omega_0 \dot{\phi} \sin \theta - mg \frac{\ell}{2} \sin \theta \quad (17)$$

Derivando respecto del tiempo la ecuaciones (15) y (16) obtenemos las aceleraciones $\ddot{\phi}$ y $\ddot{\psi}$. Ademas reordenando (17) obtenemos $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\phi} \cos \theta \quad (18)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{I_3}{I} \Omega_0 \dot{\theta} - 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \right) \quad (19)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{I_3}{I} \Omega_0 \dot{\phi} \sin \theta - \frac{mg}{I} \frac{\ell}{2} \sin \theta \quad (20)$$

(d) Primero reescribimos las ecuaciones (19) y (20) de una forma más sugestiva (solo con estas dos podemos resolver el inciso e):

$$\begin{cases} I \ddot{\theta} + I_3 \Omega_0 \dot{\phi} \sin \theta - I \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = -mg \frac{\ell}{2} \sin \theta \\ I \ddot{\phi} \sin \theta - I_3 \Omega_0 \dot{\theta} + 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Como sabemos del problema $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$ son chicos por lo tanto podemos despreciar los términos $\dot{\phi}^2$ y $\dot{\phi} \dot{\theta}$, ademas $\theta \simeq \theta_0$. De esta forma obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} I \ddot{\theta} + I_3 \Omega_0 \dot{\phi} \sin \theta_0 = -mg \frac{\ell}{2} \sin \theta_0 \\ I \ddot{\phi} \sin \theta_0 - I_3 \Omega_0 \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

(e) La forma de resolver el sistema consiste en tomar la primera ecuación y restarle la segunda multiplicada por la unidad imaginaria i obteniendo:

$$I(\ddot{\theta} - i\ddot{\phi}\sin\theta_0) + iI_3\Omega(\dot{\theta} - i\dot{\phi}\sin\theta_0) = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_0 \quad (23)$$

Si definimos $\lambda \equiv \theta - i\phi\sin\theta_0$

$$I\ddot{\lambda} + iI_3\Omega\dot{\lambda} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_0 \quad (24)$$

Donde la solución va a ser la suma de la solución homogénea y la particular:

$$\lambda = \lambda_H + \lambda_P \quad (25)$$

La solución homogénea tiene la pinta:

$$\lambda_H = ae^{-i\omega_L t} + C_H \quad (26)$$

Donde C_{H_1} es una constante imaginaria y $\omega_L \equiv \frac{I_3}{I}\Omega_0$. Por otro lado la solución particular es:

$$\lambda_P = i\omega_p\frac{1}{2}\sin\theta_0 + C_P \quad (27)$$

Donde $\omega_p \equiv \frac{mg\ell}{I_3\Omega_0}$. Sumando ambas y redefiniendo la constante $C_P + C_H = C = c + id$:

$$\lambda = ae^{-i\omega_L t} + i\omega_p\frac{1}{2}\sin\theta_0 + c + id = \theta - i\phi\sin\theta_0 \quad (28)$$

Reordenando

$$a \cos(\omega_L t) - i \left[a \sin(\omega_L t) + \frac{1}{2}\omega_p t \sin\theta_0 - d \right] = \theta - i\phi\sin\theta_0 \quad (29)$$

Igualando cada parte real e imaginaria obtenemos $\theta(t)$ y $\phi(t)$:

$$\theta(t) = a \cos(\omega_L t) + c \quad (30)$$

$$\phi(t) = a \frac{\sin(\omega_L t)}{\sin\theta_0} + \frac{1}{2}\omega_p t - \frac{d}{\sin\theta_0} \quad (31)$$

Finalmente usando las condiciones iniciales

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \phi(0) = 0 \quad \dot{\phi}(0) = 0 \quad (32)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{(\omega_0 - \frac{1}{2}\omega_p)}{\omega_L} \sin\theta_0 [\cos(\omega_L t) - 1] \quad (33)$$

$$\phi(t) = \frac{(\omega_0 - \frac{1}{2}\omega_p)}{\omega_L} \sin\theta_0 + \frac{1}{2}\omega_p t \quad (34)$$

Graficando $\theta(t)$ en función de $\phi(t)$ podemos ver algunos de los movimientos de precesión. PODE-

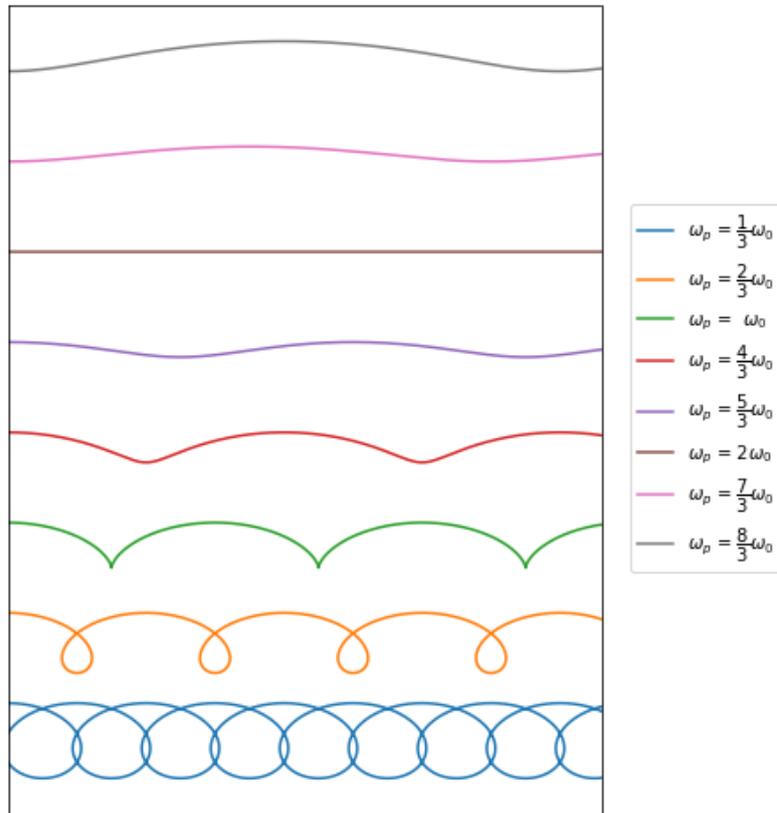
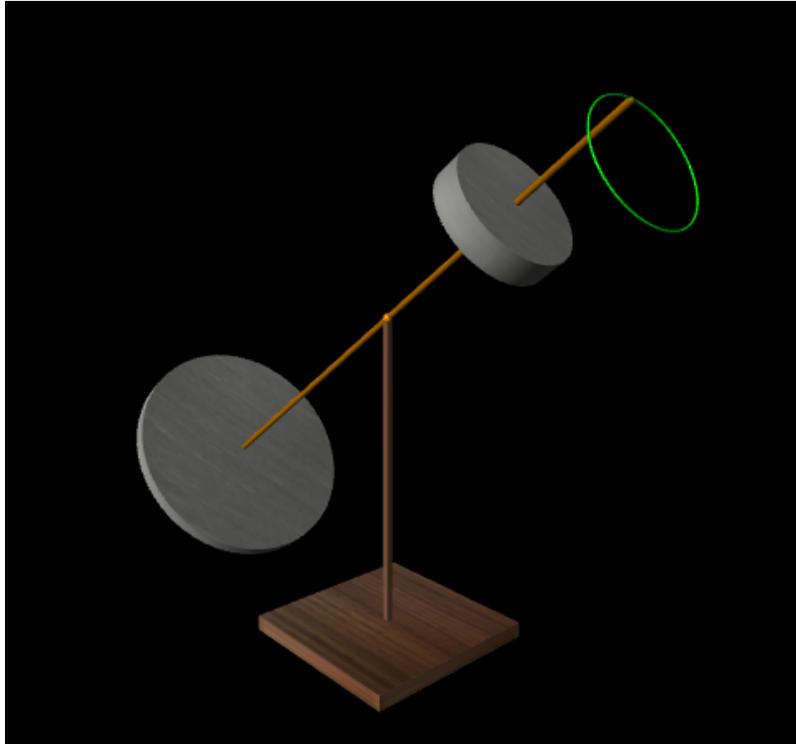


Figure 2: Gráficos de $\theta(t)$ en función de $\phi(t)$ para varios valores de ω_p en función de ω_0 . Podemos ver que el único momento donde vamos a tener precesión pura va a ser cuando $\omega_p = 2\omega_0$.

(Parte de simulación)

Antes que nada acá dejo mi Código de la simulación y para no repetirlo varias veces voy a ir dejando imágenes de la simulación para analizarlas.

(c) Como podemos ver en este caso obtenemos la precesión de trompo simétrico libre (el momento angular se conserva y el extremo del eje del giróscopo describe una circunferencia)



(d)

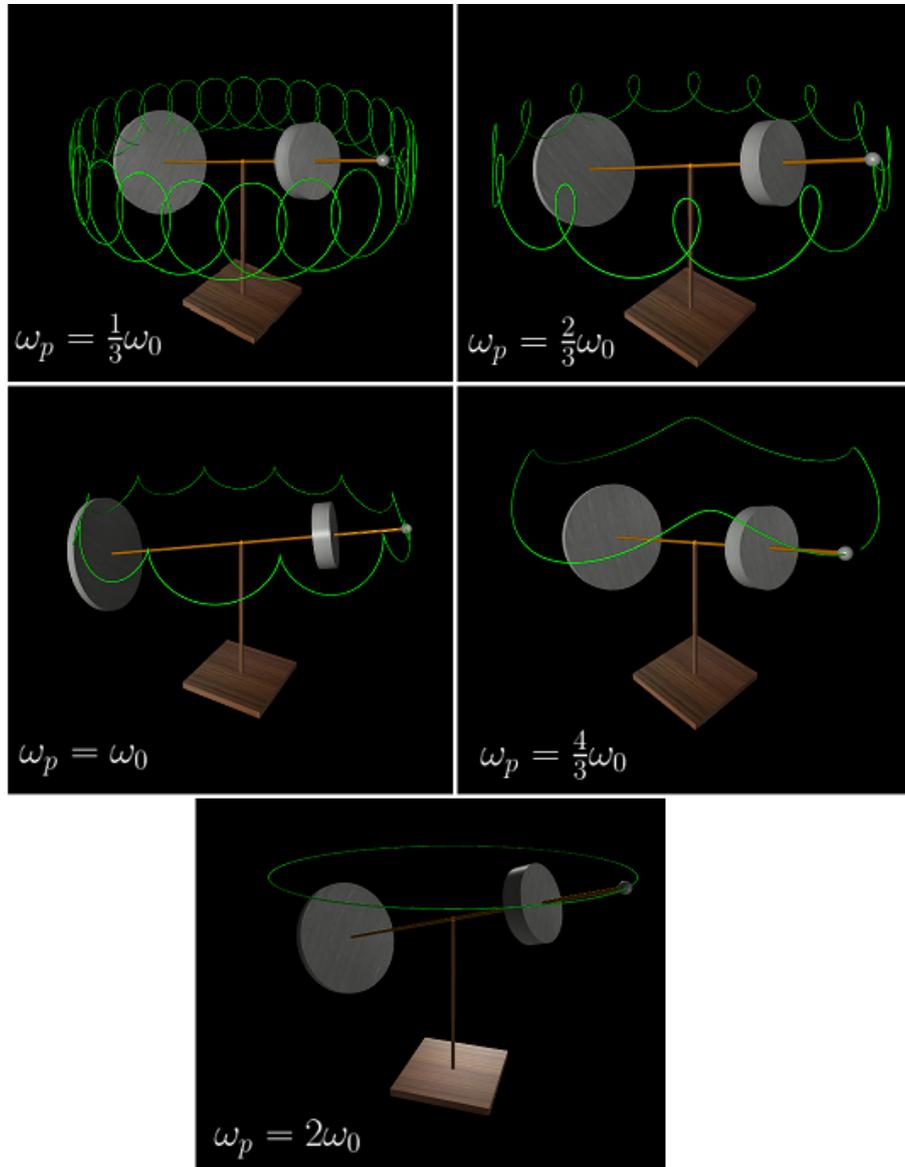


Figure 3: Imágenes de las trayectorias del giróscopo para distintos valores de ω_p

Comparando estas imágenes con el gráfico del inciso (e) podemos decir que la simulación es bastante parecida a los resultados teóricos que habíamos obtenido.