Mecánica Clásica - Entrega 6

Gastón Carrera - Rosario Vidaurreta

Sea un Lagrangiano de la forma:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\right)^2} - q\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A} = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\right)^2} + q\dot{x}B_0 y \tag{1}$$

Donde $\vec{A} = -B_0 y\hat{x}$. Esto describe el comportamiento de una particula relativista en un campo uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$.

Podemos pasar de la expresión Lagrangiana al Hamiltoniano si reemplazamos los valores de $\dot{x}$ e $\dot{y}$ por los valores de p_x y p_y.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x = m\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\right)^2}} + qB_0 y \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = p_y = m\frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\right)^2}} \tag{3}$$

Usamos ambas expresiones para despejar los valores de $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

$$\dot{x}^2 = \frac{(p_x - qA)^2 c^2 (mc)^2}{(m^2c^2 + (p_x - qA)^2)((mc)^2 + p_y^2) - p_y^2(p_x - qA)^2} \tag{4}$$

$$\dot{y}^2 = c^2 p_y^2\left(\frac{(m^2c^2 + (p_x - qA)^2) - (p_x - qA)^2}{(m^2c^2 + (p_x - qA)^2)(m^2c^2 + p_y^2) - (p_x - qA)^2 p_y^2}\right) \tag{5}$$

De esta forma podemos sumar las expresiones (4) y (5) para obtener $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c^2\frac{((p_x - qA)^2 + p_y^2)}{m^2c^2 + (p_x - qA)^2 + p_y^2} \tag{6}$$

Ahora, debemos expresar el Hamiltoniano y reemplazar allí el valor obtenido de $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$.

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} - L = m\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\sqrt{1-\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\right)^2}} + qB_0\dot{x}y + mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\right)^2} - q\dot{x}B_0 y$$

$$H = m\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + c^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2)}{\sqrt{1-\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\right)^2}} = \frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}} \tag{7}$$

Ahora, si reemplazamos la ec (6) en el Hamiltoniano de la ec (7) obtenemos H en función de las nuevas coordenadas, x, y, p_x, p_y.

$$H = \frac{mc^3\sqrt{m^2c^2 + (p_x - qA)^2 + p_y^2}}{\sqrt{c^2(m^2c^2 + (p_x - qA)^2 + p_y^2 - (p_x - qA)^2 - p_y^2)}} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad H = c\sqrt{m^2c^2 + (p_x + qB_0 y)^2 + p_y^2} = c\sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 + m^2c^2} \tag{8}$$

B)

Para realizar los diagramas de fase tendremos en cuenta:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 = \dot{p_x} \quad \longrightarrow \quad p_x = cte \tag{9}$$

Utilizamos la conservación de h.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 = \dot{h} \quad \longrightarrow \quad h = cte \tag{10}$$

Usando ambas ecuaciones (9) y (10), podemos usar la propia ec. (8) para ver la relación entre p_y e y.

$$(\frac{h}{c})^2 = m^2c^2 + (p_x + qB_0y)^2 + p_y^2 \quad \longrightarrow \quad 1 = \frac{(y - (-\frac{p_x}{qB_0}))^2}{\frac{(\frac{h}{c})^2 - m^2c^2}{(qB_0)^2}} + \frac{p_y^2}{(\frac{h}{c})^2 - m^2c^2} \tag{11}$$

Aquí podemos ver que esta es la ecuación de una elipse, centrada en $y_0 = -\frac{p_x}{qB_0}$, $p_{y0} = 0$, y con radios mayor/menor según el valor de qB_0,

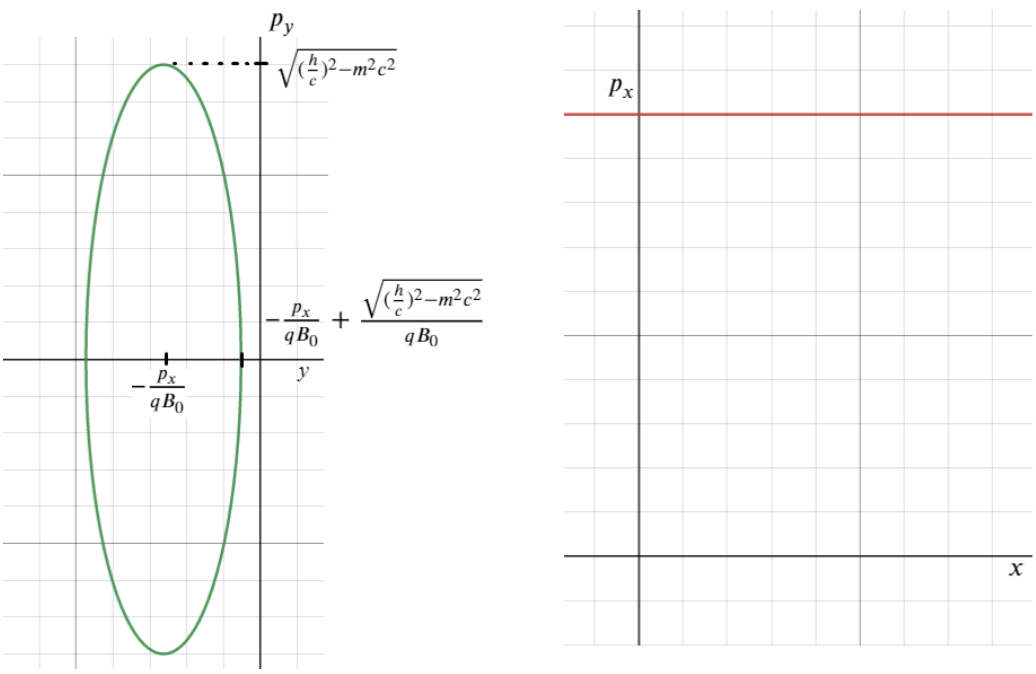

Figura 1: Diagramas de fases para (y, p_y) a la izquierda y (x, p_x) a la derecha, donde p_x es el valor de la recta roja, constante para todo x.

C)

Para el método de Hamilton-Jacobi debemos hallar una transformación canónica en la cual el nuevo hamiltoniano (H') valga = 0. La transformación (S) nos lleva de las coordenadas anteriores a unas nuevas, β_n, α_n, constantes, y cumple las siguientes relaciones.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -p_x = -\alpha_2$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = -p_y$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H' - H = 0 - h = -h = \alpha_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -\beta_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\beta_2$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -\beta_3$$

Para esto proponemos una transformación del siguiente tipo:

$$S = W(y, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) + \alpha_2 x - \alpha_1 t \tag{12}$$

Ahora, reemplazamos los valores de h, p_x y p_y en la ec.(8) obtenemos:

$$\alpha_1 = c\sqrt{m^2c^2 + (\alpha_2 + qB_0 y)^2 + (\frac{\partial W}{\partial y})^2} \quad \longrightarrow \quad W = \pm \int \sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2}\, dy \tag{13}$$

Ahora, otra relación que podemos aprovechar es $\partial S/\partial \alpha_1 = -\beta_1$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha 1} = -\beta_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int \pm\sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2}\, dy - t$$

$$t - \beta_1 = \int \pm \frac{\frac{2\alpha_1}{c^2}}{2\sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2}}\, dy \tag{14}$$

Realizamos la sustitución $u = \alpha_2 + qB_0 y$, $du/qB_0 = dy$, y llamar $A_0 = \sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2}$

$$t - \beta_1 = \pm \frac{\alpha_1}{qB_0 c^2} \int \frac{du}{\sqrt{A_0^2 - u^2}} = \pm \frac{\alpha_1}{qB_0 c^2} arcsin\left(\frac{u}{A_0}\right)$$

$$\frac{A_0}{qB_0} sin\left(\pm \frac{qB_0 c^2}{\alpha_1}(t - \beta_1)\right) - \frac{\alpha_2}{qB_0} = y(t) \tag{15}$$

Luego, para obtener $x(t)$ podemos usar la expresión $\partial S/\partial \alpha_2 = -\beta_2$.

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\beta_2 = x \pm \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int \sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2}\, dy$$

$$-\beta_2 = x \pm \int \frac{-(\alpha_2 + qB_0 y)dy}{\sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2}} = x \pm \frac{1}{qB_0} \int \frac{df}{dy} dy$$

$$-\beta_2 = x \pm \frac{1}{qB_0} \sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2}$$

$$x = -(\beta_2 \pm \frac{1}{qB_0}\sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0(\frac{A_0}{qB_0}sin\left(\pm\frac{qB_0c^2}{\alpha_1}(t-\beta_1)\right) - \frac{\alpha_2}{qB_0}))^2})$$

$$x = -\left(\beta_2 \pm \frac{A_0}{qB_0}\sqrt{1 - sin^2(\pm\frac{qB_0c^2}{\alpha_1}(t-\beta_1))}\right)$$

$$x = -\left(\beta_2 \pm \frac{A_0}{qB_0}cos\left(\frac{qB_0c^2}{\alpha_1}(t-\beta_1)\right)\right) \tag{16}$$

D) Otra forma de hacer esto es usando el método de Ángulo-Acción, en el cual se reemplazan las variables (x, y, p_x, p_y) por $(\theta_1, \theta_2, J_1, J_2)$, donde

$$J_1 = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} p_x dx$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} p_y dy$$

Además, este método es de gran utilidad para las soluciones de tipos armónicas ya que se obtienen las frecuencias facilmente como

$$\frac{\partial E}{\partial J_1} = \omega_1 = \frac{1}{\frac{\partial E}{\partial J_1}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial J_2} = \omega_2 = \frac{1}{\frac{\partial E}{\partial J_2}}$$

Para usar este método recordamos que 2 de las constantes que usaremos son $p_x = \alpha_2$ y $h = \alpha_1$. De este modo nos queda:

$$J_1 = \frac{\alpha_2}{2\pi}\oint_0^{2\pi} dx = \alpha_2 \tag{17}$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} p_y dy \tag{18}$$

Ahora, para obtener J_2 recordamos lo realizado en la ec.(11) en la que se demostró que p_y e y forman una elipse de radios A_0/qB_0 y A_0. Por esto podemos facilmente reemplazar la expresión de la integral para J_2 por el área de la elipse, cuya ecuación es conocida.

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi A_0^2}{qB_0} = \frac{A_0^2}{2qB_0} = \frac{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2}{2qB_0} \tag{19}$$

Ya teniendo J_1 y J_2 podemos hallar las frecuencias, para lo cual podemos usar la ec.(19) para despejar y obtener las derivadas de α_1 respecto a J_1 y J_2 (o visceversa y tomar la inversa).

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial J_1} = \frac{\partial \alpha_1(J_2)}{\partial J_1} = \omega_1 = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} = \frac{\frac{2\alpha_1}{c^2}}{2qB_0} \quad \longrightarrow \quad \omega_2 = \frac{qB_0c^2}{\alpha_1} \tag{21}$$

Reescribimos H reemplazando p_x y p_y por sus nuevos valores y tenemos una ecuacion para hallar W.

$$\alpha_1 = c\sqrt{(\alpha_2 + qB_0y)^2 + (\frac{\partial W}{\partial y})^2 + m^2c^2} \quad \longrightarrow \quad W = \pm\int \sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - (\alpha_2 + qB_0y)^2 - m^2c^2}\; dy \tag{22}$$

Volvemos a aprovechar las relaciones usadas en las ecuaciones anteriormente para esta nueva transformación. Primero recordamos que $\partial S/\partial\alpha_1 = -\beta_1$

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_1} = -\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial\alpha_1} - t = -t + \frac{\alpha_1}{c^2}\int \frac{\pm dy}{\sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - (\alpha_2 + qB_0y)^2 - m^2c^2}}$$

$$(-\beta_1 + t)\frac{\pm qB_0c^2}{\alpha_1} = arcsin\left(\frac{\alpha_2 + qB_0y}{\sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2}}\right)$$

$$y(t) = \frac{\sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - m^2c^2}}{qB_0} sin\left(\frac{\pm qB_0c^2}{\alpha_1}(-\beta_1 + t)\right) - \frac{\alpha_2}{qB_0} \tag{23}$$

Por otro lado $\partial S/\partial\alpha_2 = -\beta_2$.

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_2} = -\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial\alpha_2} + x = x \pm \int \frac{-(\alpha_2 + qB_0y)dy}{\sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - (\alpha_2 + qB_0y)^2 - m^2c^2}} = x \pm \frac{1}{qB_0}\int \frac{df}{dy}dy$$

$$-\beta_2 = x \pm \frac{1}{qB_0}\sqrt{(\frac{\alpha_1}{c})^2 - (\alpha_2 + qB_0y)^2 - m^2c^2}$$

$$x(t) = -\left(\beta_2 \pm \frac{A_0}{qB_0} cos\left(\frac{qB_0c^2}{\alpha_1}(t - \beta_1)\right)\right)$$

(24)

E) De las trayectorias obtenidas en incisos previos, sabemos que el redio esta dado por:

$$R = \frac{\sqrt{(\frac{h}{c})^2 - m^2c^2}}{qB_0} = \frac{1}{qB_0}\sqrt{(P_x + qB_0y)^2 + P_y^2}$$

Por otra parte, dado que $E = \frac{mc^3}{\sqrt{1 - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{c^2}}}$ y tomando la ecuación (7), entonces tenemos:

$$h = c\sqrt{(p_x + qB_0y)^2 + p_y^2 + m^2c^2} = E = mc^2\gamma \qquad con \quad \gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}}$$

Tomando que $\beta = \frac{|v|}{c}$ y usando el resultado de la ecuación (6) se tiene:

$$\beta = \frac{c\sqrt{(P_x + qB_0y)^2 + P_y^2}}{E}$$

Por lo tanto podemos llegar a lo siguiente:

$$\frac{\beta E}{cqB_0} = \frac{cE\sqrt{(P_x + qB_0y)^2 + P_y^2}}{cqB_0E} = \frac{\sqrt{(P_x + qB_0y)^2 + P_y^2}}{qB_0} = R$$