Hamilton-Jacobi

Orozco, Quispe

Noviembre 2021

1. Hamiltoniano

El caso de estudio es el de una partícula de masa m y carga q inmersa en un campo magnético. El lagrangiano relativista que describe su movimiento bidimensional es el siguiente:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} \tag{1}$$

Para establecer el Hamiltoniano nos conviene escribir dicho Lagrangiano en notación de índices que sería como sigue:

$$\mathcal{L}|_i = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x_i}^2}{c^2}} + q\dot{x_i}A_i \tag{2}$$

Debido a que el Hamiltoniano es la transformada de Legendre del Lagrangiano, siendo una función para las variables p y q no interesa escribir los $\dot{x_i} = \dot{x_i}(p,q)$ para poder reemplazarlos en la transformada.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x_i}} = \frac{m\dot{x_i}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x_i}^2}{c^2}}} + qA_i = P_i \tag{3}$$

Esta ecuación nos da una magnitud conservada. Luego podremos despejar las velocidades generalizadas en función de los $p_i, A_i y x_i$ que resulta lo siguiente:

$$m\dot{x_i} = (P_i - qA_i)\sqrt{1-\frac{\dot{x_i}^2}{c^2}} \tag{4}$$

El Hamiltoniano se define $H = P_i\dot{q_i} - \mathcal{L}$ por lo que son válidas las siguientes series de igualdades:

$$H|_i = P_i(\frac{P_i - qA_i}{m})\sqrt{1-\frac{\dot{x_i}^2}{c^2}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x_i}^2}{c^2}} - qA_i(\frac{P_i - qA_i}{m})\sqrt{1-\frac{\dot{x_i}^2}{c^2}} \tag{5}$$

$$H|_i = (\frac{(P_i - qA_i)^2}{m} + mc^2)\sqrt{1-\frac{\dot{x_i}^2}{c^2}} \tag{6}$$

$$H|_i = [(P_i - qA_i)^2 + m^2c^2]\frac{\sqrt{1-\frac{\dot{x_i}^2}{c^2}}}{m} \tag{7}$$

De esta última igualdad habrá que tener en cuenta el término de la raíz cuando escribimos el Hamiltoniano completo que será hasta ahora:

$$H = [(\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2c^2]\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} \tag{8}$$

En relatividad se cumple la siguiente igualdad que sale de que la energía es un invariante relativista:

$$\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} = \frac{c^2}{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}} \tag{9}$$

Donde $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ y justamente $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y usando la igualdad (4) se llega a que:

$$\vec{p} = \vec{P} - q\vec{A} \tag{10}$$

Esto deriva en que el término de la raíz de la ecuación (8) es igual a (**??**) o lo que es lo mismo:

$$(pc)^2 + (mc^2)^2 = c^2[(\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2c^2] \tag{11}$$

Por lo que en última instancia el Hamiltoniano resulta:

$$H = [(\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2c^2]\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} \tag{12}$$

$$H = [(\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2c^2]\frac{c^2}{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}} \tag{13}$$

$$H = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \tag{14}$$

$$H = c\sqrt{(\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2c^2} \tag{15}$$

Que es justamente lo que se quería probar.

2. Diagramas de Fase

Teniendo en cuenta que $\bar{x} = x\hat{x} + y\hat{y}$ (dado que el movimiento es solo bidimensional) sé que el lagrangiano y el hamiltoniano se ven como

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{c^2}} - qB_0yx \tag{16}$$

$$H = c\sqrt{(p_x + qB_0y)^2 + p_y^2 + m^2c^2} \tag{17}$$

El lagrangiano no depende explícitamente del tiempo con lo cual puedo decir que H se conserva, de forma que $H = h$. Se tuvo en cuenta también que según la ecuación 9 es posible observar que la energía es igual al hamiltoniano, $E = h$. Reescribiendo entonces así la ecuación 17:

$$(y + \frac{px}{qB_0})^2(qB_0)^2 + p_y^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2 - (mc)^2$$

$$\frac{(y + \frac{px}{qB_0})^2}{\frac{\left(\frac{h}{c}\right)^2 - (mc)^2}{(qB_0)^2)}} + \frac{p_y^2}{\left(\frac{h}{c}\right)^2 - (mc)^2} = 1$$

Siendo esta última la ecuación de una elipse centrada en $y_0 = \frac{p_x}{qB_0}$ y $p_y0 = 0$, y con semiejes $a = \frac{\sqrt{\left(\frac{h}{c}\right)^2 - (mc)^2}}{qB_0}$ y $b = \sqrt{\left(\frac{h}{c}\right)^2 - (mc)^2}$.

3. Resolución por Hamilton-Jacobi

Como el Lagrangiano no depende de t, sé que el hamiltoniano es constante. Además, puedo observar que x es una coordenada cíclica. En un sistema conservativo y con coordenadas cíclicas es conveniente proponer una solución del tipo

$$S(x, y, \alpha_x, \alpha_1, t) = W(y, \alpha) + \alpha_x x - \alpha_1 t$$

Donde $\alpha_x = p_x$ y $\alpha_1 = h$ (ambas constantes). De esta manera, reemplazando:

$$\begin{aligned} H(x,y,\alpha_x,p_y = \frac{\partial S}{\partial y}(x,y,\alpha,t)) &= -\frac{\partial S}{\partial t} \\ c\sqrt{(\alpha_x + qB_0 y)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + m^2c^2} &= \alpha_1 \end{aligned}$$

Donde se utilizó la ecuación 17 del Hamiltoniano. Despejando de aquí la derivada de W e integrando a ambos lados se obtiene

$$W(y,\alpha_x,\alpha_1) = \pm \int \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - m^2c^2 - (\alpha_x + qB_0 y)^2}\, dy$$

Ahora me interesa encontrar las contantes β_x y β_1. Para β_x

$$\beta_x = \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = x + \frac{\partial W}{\partial \alpha_x}$$

Definiendo $z = \alpha_x + qB_0 y$ de forma que

$$W(z,\alpha_x,\alpha_1) = \pm \frac{1}{qB_0} \int \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - m^2c^2 - z^2}\, dz$$

entonces, integrar con respecto a y para luego derivar respecto α_x simplemente da el mismo resultado por lo tanto

$$\beta_x = x \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - m^2c^2 - (\alpha_x + qB_0 y)^2}}{qB_0} \tag{18}$$

Ahora para β_1

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - t$$

y aquí, meto la derivada respecto a α_1 dentro de la integral y luego integro

$$\begin{aligned} \beta_1 + t &= \pm \int \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - m^2c^2 - (\alpha_x + qB_0 y)^2} \right) dy \\ \beta_1 + t &= \pm \frac{\alpha_1}{c^2} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(\alpha_1}{c}\right)^2 - m^2c^2) - (\alpha_x + qB_0 y)^2}} dy \end{aligned}$$

Utilizo el cambio de variable $z = \alpha_x + qB_0 t$ con lo cual

$$\beta_1 + t = \pm \frac{\alpha_1}{c^2 qB_0} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - m^2c^2 - z^2}} dy$$

Dado que sabemos que la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{B^2 - A^2 z^2}} dz = -arc\cos\left(\frac{A}{B} z\right)$$

tomando $A = 1$ y $B = \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - (mc)^2}$, se puede entonces resolver que

$$\beta_1 + t = \pm \frac{\alpha_1}{c^2 q B_0} arc\,cos\left(\frac{\alpha_x + qB_0 y}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - (mc)^2}}\right)$$

Es posible despejar de esta manera $y(t)$. Luego reemplazando en la ecuación 18 escribimos $x(t)$.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - m^2c^2}}{qB_0}\ cos\left(\frac{c^2 qB_0}{\alpha_1}(\beta_1 + t)\right) - \frac{\alpha_x}{qB_0} \\ x(t) &= \beta_x \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - m^2c^2}}{qB_0}\ sin\left(\frac{c^2 qB_0}{\alpha_1}(\beta_1 + t)\right) \end{aligned}$$

La ecuación de la trayectoria viene dada por la ecuación 18. La misma puede ser reescrita de manera que

$$\begin{aligned} (x-\beta_1)^2(qB_0)^2 + (y + \frac{\alpha_x}{qB_0})^2(qB_0)^2 &= \left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - (mc)^2 \\ (x-\beta_1)^2 + (y + \frac{\alpha_x}{qB_0})^2 &= \frac{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - (mc)^2}{(qB_0)^2} \end{aligned}$$

Esto describe una trayectoria circular en el plano $x - y$ centrada en $(\beta_1, -\frac{\alpha_x}{qB_0})$ de radio

$$R = \frac{\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{c}\right)^2 - (mc)^2}}{qB_0} \tag{19}$$

4. Ángulo acción

Recordando que calculo las variables de acción como $J = \frac{1}{2\pi}\oint pdq$, calculo J_x y J_1. Empezando con J_x, como sé que x es una coordenada cíclica entonces $px = cte$. Dibujando el diagrama de fase obtengo simplemente una recta constante que puedo representar entre 0 y 2π.

$$J_x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_x dx = p_x$$

Mientras que para J_1, si bien p_y no es constante, el diagrama de fases realizado en el inciso b) es una elipse de semiejes a y b. Con lo cual, calcular J_1 es simplemente calcular el área de la elipse

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_y dy = \frac{1}{2\pi}\pi ab \\ J_1 &= \frac{\left(\frac{h}{c}\right)^2 - (mc)^2}{2qB_0} \end{aligned}$$

Por lo tanto, invirtiendo la relación entre h y J puedo obtener las frecuencias asociadas a las variables de los ángulos de forma que

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{\partial h(J_1)}{\partial J_2} = 0 \\ \omega_1 &= \frac{\partial h(J_1)}{\partial J_1} = \frac{cqB_0}{\sqrt{2qB_0 J_1 + (mc)^2}} \end{aligned}$$

Reemplazando J_1, esto es justamente la frecuencia obtenida en el item anterior de forma que

$$\omega_1 \quad = \quad \frac{c^2 q B_0}{h}$$

5. De lo simbólico a lo real

Si $\beta = \frac{|\vec{v}|}{c}$ entonces la energía es $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Despejando de esta última ecuación, se puede escribir

$$\beta(E) \quad = \quad \frac{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}}{E}$$

Reemplazando este resultado en $R = \frac{\beta(E)\, E}{q B_0 c}$ se obtiene que

$$R = \frac{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}}{cqB_0} \tag{20}$$

que es justamente el resultado al que se llegó en la ecuación 19.

Por último tenemos que de la ecuación (20) podremos sacar el campo magnético necesario para llevar a los hechos esta situación lo que se lleva a cabo en el CERN con el experimento LHC. Con un radio de 4,3 km y si queremos protones con 7TeV de energía el campo magnético necesario se calcula en:

$$B = 5{,}43\ T \tag{21}$$