Entrega Nº6/7

Matías Ezequiel Silva - Sebastian Warley
Mecánica Clásica
FCEN (UBA) - Segundo Cuatrimestre 2021

El hamiltoniano relativista que describe el movimiento bidimensional de una partícula de masa m y carga q sujeta a un campo magnético se escribe:

$$\mathcal{H} = c\sqrt{|\vec{p} - q\vec{A}|^2 + m^2c^2}$$

donde $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Suponga un campo magnético constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$ descrito en uno de los gauges de Landau $\vec{A} = -B_0 y\hat{x}$.

a. Demuestre que el hamiltoniano es el dado partiendo del siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2}} + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$$

b. Dibuje los diagramas de fases.

c. Usando el método Hamiltom-Jacobi halle $x(t)$ e $y(t)$, y encuentre la ecuación de la trayectoria en el plano $x - y$. ¿A qué trayectoria corresponde? Obtenga el radio y la frecuencia de la trayectoria en el límite no-relativista: $(\vec{p} - q\vec{A}) \ll m^2c^2$. ¿Recupera los valores esperados?

d. Usando el método de ángulo-acción, proponga una generatriz $F_2(q, J)$ y halle las 'frecuencias'. Compárelas con lo obtenido en el inciso anterior.

e. Muestre que $R = \beta(E)E/(qB_0c)$ (*ayuda*: use que definiendo $\beta = |\vec{v}|/c$, $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, de donde puede despejar $\beta(E)$). Calcule el valor del campo magnético necesario para mantener rotando en el acelerador LHC protones con $E = 7\ TeV$ en un radio de 4,3 Km.

Solución

1. *a*) Demostrar que el hamiltoniano es el dado con el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2}} + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}$$

En primer lugar, sabemos que el movimiento es bidimensional, con lo cual tomamos $\vec{r} = x\hat{x}+y\hat{y}$ como coordenadas generalizadas. Luego, el potencial vector es $\vec{A} = -B_0 y\hat{x}$ y reemplazamos en la expresión del lagrangiano que nos brindan:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}-\frac{\dot{y}^2}{c^2}} - \dot{x}B_0 qy$$

Ahora, el hamiltoniano está dado por la siguiente expresión:

$$\mathcal{H}(q_i,p_i,t) = \sum_i p_i\dot{q}_i(q_i,p_i,t) - \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i(q_i,p_i,t),t) \text{ , donde } p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$

Calculamos los momentos p_i asociados a las coordenadas $\{x,y\}$ para así despejar $\{\dot{x},\dot{y}\}$:

$$p_y = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} \Rightarrow p_y = \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2-\dot{y}^2/c^2}} \Rightarrow m^2\dot{y}^2 = p_y^2(1-\dot{x}^2/c^2-\dot{y}^2/c^2)$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2\frac{p_y^2}{c^2} = p_y^2 - \dot{y}^2\left(\frac{p_y^2}{c^2}+m^2\right) \Rightarrow \dot{x}^2 = c^2 - \dot{y}^2\left(1+\frac{m^2c^2}{p_y^2}\right) \tag{1}$$

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \Rightarrow p_x = \underbrace{\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2-\dot{y}^2/c^2}}}_{=\dot{x}p_y/\dot{y}} - B_0 qy \Rightarrow \dot{x} = \frac{\dot{y}}{p_y}(p_x+B_0qy) \tag{2}$$

Si tomamos el cuadrado de (2) y lo igualamos a (1):

$$c^2 - \dot{y}^2\left(1+\frac{m^2c^2}{p_y^2}\right) = \frac{\dot{y}^2}{p_y^2}(p_x+B_0qy)^2 \Rightarrow \boxed{\dot{y}^2 = \frac{p_y^2c^2}{(p_x+qB_0y)^2+p_y^2+m^2c^2}}$$

$$\Rightarrow \text{ Reemplazando en (1) } \Rightarrow \boxed{\dot{x}^2 = \frac{c^2(p_x+qB_0y)^2}{(p_x+qB_0y)^2+p_y^2+m^2c^2}}$$

Una vez tenemos las velocidades en función de las coordenadas generalizadas y sus momentos asociados, podemos escribir el hamiltoniano:

$$\sum_i p_i\dot{q}_i(q_i,p_i,t) = \dot{x}p_x+\dot{y}p_y = \frac{c(p_x+qB_0y)p_x}{\sqrt{(p_x+qB_0y)^2+p_y^2+m^2c^2}} + \frac{cp_y^2}{\sqrt{(p_x+qB_0y)^2+p_y^2+m^2c^2}}$$

$$\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i(q_i,p_i,t),t) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2(q_i,p_i,t)}{c^2}-\frac{\dot{y}^2(q_i,p_i,t)}{c^2}} - \dot{x}(q_i,p_i,t)B_0qy =$$

$$= -\frac{m^2c^3 + qB_0yc(p_x + B_0y)}{\sqrt{(p_x + qB_0y)^2 + p_y^2 + m^2c^2}} \Rightarrow \mathcal{H} = \sum_i p_i\dot{q}_i(q_i, p_i, t) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i(q_i, p_i, t), t) =$$

$$= \frac{c(p_x + qB_0y)p_x + cp_y^2 + m^2c^3 + qB_0yc(p_x + B_0y)}{\sqrt{(p_x + qB_0y)^2 + p_y^2 + m^2c^2}} =$$

$$= c\left[\frac{(p_x + qB_0y)^2 + p_y^2 + m^2c^2}{\sqrt{(p_x + qB_0y)^2 + p_y^2 + m^2c^2}}\right] = c\sqrt{(p_x + qB_0y)^2 + p_y^2 + m^2c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H} = c\sqrt{|\vec{p} - q\vec{A}|^2 + m^2c^2} \text{ , donde } \vec{p} = p_x\hat{x} + p_y\hat{y} \text{ y } \vec{A} = -B_0y\hat{x}}$$

Y mostramos que con el lagrangiano dado, llegamos al hamiltoniano original.

b) Diagramas de fases.

Para los diagramas de fases, tenemos que el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, con lo cual $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = h = cte$; además, x es cíclica (el hamiltoniano no depende de x) y entonces $\dot{p}_x = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = cte$:

$$h = c\sqrt{(p_x + qB_0y)^2 + p_y^2 + m^2c^2} \Rightarrow \boxed{(p_x + qB_0y)^2 + p_y^2 = \frac{h^2}{c^2} - m^2c^2} \tag{3}$$

A partir de la expresión (3) podemos graficar el diagrama de fase para $\{y, p_y\}$ como se muestra en la Figura 1.

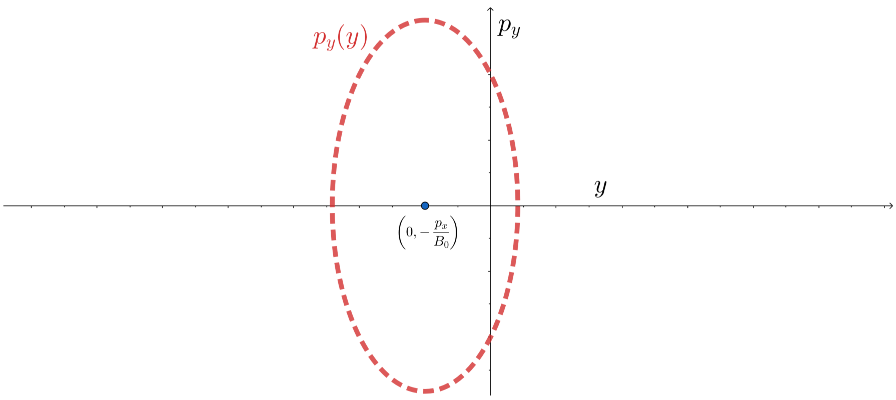

Figura 1: Diagrama de fase para y vs p_y.

Del gráfico del diagrama de fases vemos que se corresponde con elipses, lo que nos anticipa que tendremos un movimiento periódico. Estas elipses van a estar corridas en el eje $\hat{y}$ según el valor de $-\frac{p_x}{qB_0}$ y tendrán como semieje mayor (el paralelo a $\hat{p_y}$) $a = \sqrt{h^2/c^2 - m^2c^2}$, y semieje menor (paralelo a $\hat{y}$) $b = \frac{a}{|qB_0|}$; de esto podemos observar que las elipses serán menos excéntricas (mas redondeadas) cuanto más cercano a uno sea $|qB_0|$.

c) Hallar $x(t)$ e $y(y)$ con el método de Hamilton-Jacobi.

En primer lugar, tenemos un sistema conservativo, con lo cual podemos separar la función generatriz $S(q,\alpha,t)$ en la variable t y entonces $S(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) + f(t)$. Usando esto en la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\mathcal{H}(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q,\alpha,t),t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,\alpha,t) = 0 \Rightarrow h + f'(t) = 0 \Rightarrow f(t) = -\alpha_1 t \text{ , donde tomamos } \alpha_1 = h$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q,\alpha),t) = -\frac{\partial S}{\partial t}(q,\alpha,t) = \alpha_1$$

Además tenemos a $\{x\}$ como coordenada cíclica, por lo cual podemos separar la función principal de Hamilton $W(q,\alpha)$ también en esa variable como $W(q,\alpha) = W_1(q_1,\alpha) + W_2(q_2,\alpha)$:

$$S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,t) = W_1(x,\alpha_1,\alpha_2) + W_2(y,\alpha_1,\alpha_2) - \alpha_1 t \text{ , y como } \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial W_1}{\partial x} = p_x = cte = \alpha_2$$

$$\Rightarrow W_1(x,\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_2 x \Rightarrow S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,t) = \alpha_2 x + W_2(y,\alpha_1,\alpha_2) - \alpha_1 t$$

Y a partir de esto volvemos a la ecuación de H-J:

$$\mathcal{H}(x,y,\alpha_2,\frac{\partial W_2}{\partial y},t) = \alpha_1 \Rightarrow c\sqrt{(\alpha_2 + qB_0 y)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial y}\right)^2 + m^2c^2} = \alpha_1$$

$$\Rightarrow W_2(y,\alpha_1,\alpha_2) = \pm \int \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2} dy$$

$$\Rightarrow S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,t) = \alpha_2 x - \alpha_1 t \pm \int \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2} dy$$

Como S es una función generatriz de tipo 2, cumple que $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$, con $\beta_i = cte$:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1 \Rightarrow -t \pm \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\int \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2} dy\right) = \beta_1$$

No estamos integrando en la variable α_1, y entonces podemos derivar dentro de la integral:

$$\int \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\sqrt{\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2}\right) dy = \int \frac{\alpha_1 dy/c^2}{\sqrt{\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2}} = \pm(t + \beta_1)$$

$$\text{De tabla: } \int \frac{\alpha_1 dy/c^2}{\sqrt{\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0 y)^2}} = -\frac{\alpha_1}{qB_0c^2} \arccos\left(\frac{\alpha_2 + qB_0 y}{\sqrt{\alpha_1/c^2 - m^2c^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \arccos\left(\frac{\alpha_2 + qB_0 y}{\sqrt{\alpha_1/c^2 - m^2c^2}}\right) = \mp\frac{qB_0c^2}{\alpha_1}\,(t+\beta_1)$$
$$\Rightarrow y(t) = \frac{\sqrt{\alpha_1^2/c^2 - m^2c^2}}{qB_0}\cos\left[\frac{qB_0c^2}{\alpha_1}(t+\beta_1)\right] - \frac{\alpha_2}{qB_0}$$

Donde consideramos que $\cos(\mp x) = \cos x$.

Por otro lado, para la otra coordenada tenemos:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2 \Rightarrow x \pm \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\int\sqrt{\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0y)^2 dy}\right) = \beta_2$$

Notar que si hacemos el cambio de variable $u = \alpha_2 + qB_0 y \Rightarrow du = qB_0 dy$; además, derivar respecto de u es lo mismo que hacerlo respecto de $\alpha_2 \Rightarrow \partial/\partial\alpha_2 = \partial/\partial u$:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\int\sqrt{\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0y)^2 dy}\right) = \frac{1}{qB_0}\int\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2 - u^2}\right)du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{qB_0}\sqrt{\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2 - (\alpha_2 + qB_0y)^2} = \pm(\beta_2 - x) = \mp(x-\beta_2)$$
$$\Rightarrow (x-\beta_2)^2 + \left(y + \frac{\alpha_2}{qB_0}\right)^2 = \left(\frac{\alpha_1^2}{c^2} - m^2c^2\right)\frac{1}{q^2B_0^2} \Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Y obtenemos la ecuación de una trayectoria circular, con centro en (x_0, y_0) y radio $R = \frac{\sqrt{\alpha_1^2/c^2 - m^2c^2}}{|qB_0|}$. De aquí despejamos x:

$$x(t) = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1^2/c^2 - m^2c^2}}{qB_0}\left|\operatorname{sen}\left[\frac{B_0qc^2}{\alpha_1}(t+\beta_1)\right]\right| + \beta_2$$

Podemos deshacernos del $\pm$ si usamos que $p_y = \frac{\partial W_2}{\partial y}$:

$$p_y = \pm\sqrt{\alpha_1^2/c^2 - m^2c^2}\left|\operatorname{sen}\left[\frac{B_0qc^2}{\alpha_1}(t+\beta_1)\right]\right| \Rightarrow x(t) = \beta_2 \pm \frac{1}{qB_0}|p_y|$$

Tomamos '+' cuando $p_y > 0 \wedge \operatorname{sen} x > 0$ y '−' con $p_y < 0 \wedge \operatorname{sen} x < 0$; de esta forma $\pm|p_y| = p_y$ y podemos dejar el coseno sin el módulo. Finalmente, llegamos a:

$$x(t) = R\operatorname{sen}[\omega(t+t_0)] + x_0$$
$$y(t) = R\cos[\omega(t+t_0)] + y_0$$

Donde $x_0 = \beta_2$, $y_0 = \frac{-\alpha_2}{qB_0}$, $t_0 = \beta_1$ y $\omega = \frac{qB_0c^2}{\alpha_1}$. Al radio lo podemos reescribir recordando que $\alpha_1 = h = c\sqrt{|\vec{p} - q\vec{A}|^2 + m^2c^2} \Rightarrow R = \frac{|\vec{p}-q\vec{A}|}{|qB_0|}$.

Si vemos como es la solución en el limite clásico, es decir $|\vec{p}-q\vec{A}|^2 \ll m^2c^2 \Rightarrow \alpha_1 = h \approx mc^2 \Rightarrow \omega \approx \frac{qB_0}{m}$. De esta forma, recuperamos los valores esperados del cálculo sin tener en cuenta los efectos relativistas (como habíamos obtenido en el ejercicio 19 de la guía 1).

d) Resolver utilizando el método de ángulo-acción.

Como este es un problema conservativo, entonces $h = cte$ y proponemos como función generatriz $F_2(q, J)$ a la función principal de Hamilton $W(x, y, \alpha_1, \alpha_2)$ que hallamos en el ítem anterior, pero cambiando de las variables $\{\alpha_i\}$ a las $\{J_i\}$. Así, obtenemos un nuevo hamiltoniano $K(J_x, J_y) = E = cte = h$, donde los J_i son las variables de acción y los θ_i las variables de ángulo (notar que K no depende de θ_i, lo que implica $J_i = cte$). Podemos hallar estas nuevas coordenadas de la siguiente manera:

$$J_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i dq_i \qquad \wedge \qquad \theta_i = \overbrace{\frac{\partial E}{\partial J_i}}^{\omega_i} t + \theta_{i0}$$

La variable de acción se corresponde con el área bajo la curva en el gráfico del diagrama de fase. Por lo tanto, para J_x como p_x es constante (sería una linea constante en el diagrama de fases p_x vs x) integramos en un período hasta 2π (es arbitrario, y lo elegimos así para que se simplifique) y entonces $J_x = p_x$. Para J_y en el diagrama de fases teníamos elipses, con lo cual su área es $\pi ab \Rightarrow J_y = \frac{E^2/c^2 - m^2c^2}{2|qB_0|}$.

Ahora necesitamos E en función de las variables de acción; como J_x no depende de E, entonces este tampoco depende de esa variable $\Rightarrow E(J_x, J_y) = E(J_y)$:

$$\omega_x = \frac{\partial E}{\partial J_x} = 0 \Rightarrow \theta_x = \theta_{x0} = cte$$

Para la otra variable de ángulo necesitamos despejar E de la expresión de J_y:

$$J_y = \frac{E^2/c^2 - m^2c^2}{2|qB_0|} \Rightarrow E = c\sqrt{2J_y|qB_0| + m^2c^2} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial J_y} = \omega_y = \frac{c|qB_0|}{\sqrt{2J_y|qB_0| + m^2c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta_y = \frac{c|qB_0|t}{\sqrt{2J_y|qB_0| + m^2c^2}} + \theta_{y0}$$

Podemos reescribir está frecuencia si reemplazamos J_y por su valor en función de E y obtenemos $\omega_y = \frac{|qB_0|c^2}{E}$. Como $E = h = cte$, la frecuencia que obtenemos con este método es la misma que la obtenida en el ítem anterior (a menos del módulo en qB_0), lo cual era algo esperable, pues estamos resolviendo un mismo problema de diferentes formas.

e) Mostrar que $R = \frac{\beta(E)E}{qB_0c}$.

Para demostrar esto, usamos la ayuda que nos dan para despejar β en función de la E:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{mc^2}{E} \Leftrightarrow 1-\beta^2 = \frac{m^2c^4}{E^2} \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{c^2(E^2/c^2 - m^2c^2)}{E^2}$$

$$\Leftrightarrow |\beta| = c\frac{\sqrt{E^2/c^2 - m^2c^2}}{|E|}$$

Como $\beta = |\vec{v}|/c \geq 0 \Rightarrow |\beta| = \beta$, y si tomamos $E = h \geq 0 \Rightarrow |E| = E$ y además $\sqrt{E^2/c^2 - m^2c^2} = R|qB_0|$:

$$\beta(E) = \frac{cR|qB_0|}{E} \Leftrightarrow \boxed{R = \tfrac{\beta(E)E}{|qB_0|c}}$$

Necesitamos calcular el campo magnético necesario para mantener rotando en el acelerador LHC protones con $E = 7TeV$ en un radio de $4{,}3Km$; con ello en mente despejamos $|B_0|$ de la expresión anterior $\Rightarrow |B_0| = \frac{\beta(E)E}{|q|cR}$. Usamos como datos la carga de un protón $q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}C$, su masa $m_p = 9{,}383 \cdot 10^2 MeV/c^2$ y la velocidad de la luz en el vacío $c = 2{,}998 \cdot 10^8 m/s$. En primer lugar, reescribimos β de la siguiente forma:

$$\beta^2 = \frac{c^2(E^2/c^2 - m^2c^2)}{E^2} = 1 - \frac{(mc^2)^2}{E^2} \Rightarrow \beta(E) = \sqrt{1 - \frac{(mc^2)^2}{E^2}}$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{(9{,}383 \cdot 10^2 \frac{MeV}{\cancel{c^2}}\cancel{c^2})^2}{(\underbrace{7{,}000TeV}_{7{,}000\cdot 10^6 MeV})^2}} = \sqrt{1 - \frac{8{,}804 \cdot \cancel{10^5} \cancel{MeV^2}}{4{,}900 \cdot 10^{\cancel{13}8} \cancel{MeV^2}}} = \sqrt{1 - 1{,}797 \cdot 10^{-8}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta \approx 1} \Rightarrow |B_0| \approx \frac{E}{|q|cR} = \frac{cE/c^2}{|q|R} = \frac{(2{,}998 \cdot 10^8 \cancel{m}/s)(7{,}000 \cdot 10^6 \overbrace{MeV/c^2}^{=1{,}783\cdot 10^{-30}kg})}{(1{,}602 \cdot 10^{-19}C)(4{,}300 \cdot 10^3 \cancel{m})} =$$

$$= \frac{3{,}742 \cdot 10^{-15}}{6{,}889 \cdot 10^{-16}} \frac{kg}{sC} \Rightarrow \boxed{|B_0| \approx 5{,}432\ T}$$