Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2021 – Recuperatorio del Primer parcial (13/12/2021)

(Justifique todas sus respuestas. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto. Ponga su nombre en la primer hoja y enumere todas las carillas. Entregue un único **pdf** con los distintos problemas en hojas separadas, el nombre del archivo debe ser Apellido_Nombre_LUxxxx. La entrega se hará en el *campus* solapa *Recuperatorio Primer parcial*. Sólo en casos extremos y justificados se podrá mandar por mail.)

P1. En un alambre helicoidal de radio a y paso $z = \frac{h\theta}{2\pi}$ se enhebran dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0, también enhebrado en la helicoide. **No hay gravedad.** Determinar:

a) Grados de libertad del sistema y su Lagrangiano en coordenadas generalizadas apropiadas.

b) Ecuaciones de movimiento.

c) Dadas las transformaciones: $\theta_1 \to \theta_1 + \epsilon; \theta_2 \to \theta_2 + \epsilon$. Establezca si es una operación de simetría y en caso afirmativo exprese la magnitud conservada asociada a esta simetría. Encuentre otra magnitud que se conserva, justifique. (θ_i es el ángulo polar de la partícula i).

d) Suponga ahora que **existe gravedad** ($\mathbf{g} = -g\hat{z}$), pruebe que la transformación del punto c) es una simetría generalizada del Lagrangiano correspondiente. Encuentre la magnitud conservada asociada.

P2. Considere un péndulo simple de longitud l, masa M en un campo gravitatorio g. Usando el Lagrangiano de este problema, pero aproximado a orden θ^4, alrededor del equilibrio $\theta_{eq} = 0$:

a) Si se sabe que el péndulo parte de $\theta_1 = 0$ al tiempo $t_1 = 0$ y vuelve al mismo lugar, al tiempo $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$. Proponiendo una solución aproximada de la forma $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$, use el principio variacional de Hamilton y encuentre φ y la amplitud θ_0. *Ayuda: Si $\omega\tau$ es múltiplo entero de π se cumple* $\int_0^\tau \sin^2(\omega t)dt = \frac{\tau}{2}$, $\int_0^\tau \sin^4(\omega t)dt = \frac{3\tau}{8}$.

b) De la relación obtenida en el punto anterior para la amplitud θ_0, despeje $\frac{\omega}{\omega_0}$ en función de θ_0 (se ha definido $\omega_0 = \sqrt{g/l}$). Aplique esta expresión para el caso en que $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, y encuentre el valor aproximado para $\frac{\omega}{\omega_0}$. Compare con el valor exacto $\frac{\omega}{\omega_0} = 0.931808$ obtenido para la misma amplitud $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$.

P3. Una partícula está sujeta a un potencial central $V(r) = \gamma \ln(r/R)^2$, con γ y R positivas.

a) Escriba el Lagrangiano y obtenga el potencial efectivo del problema unidimensional equivalente justificando su procedimiento.

b) Encuentre la ecuación que satisface el radio r_c y muestre gráficamente que existe un solo r_c. ¿Cómo debe ser r_c respecto de r_0? Estudie cuantitativamente su estabilidad.

c) Dibuje el potencial efectivo (*Ayuda: analice los límites*). Discuta cualitativamente las trayectorias posibles.

d) Encuentre la frecuencia de oscilación radial para pequeños apartamientos de la órbita circular estable. Despreciando variaciones en $\dot{\varphi}$ de su valor constante de órbita circular, pruebe que en el caso $\ell^2 = m\gamma r_c^2$, para condiciones iniciales apropiadas, la trayectoria se puede describir mediante $r(\varphi) = r_c + a\cos(2\varphi)$. Dibuje cualitativamente esta trayectoria.

P4. El sistema de la figura está formado por cuatro masas: dos laterales m y una masa central M que se encuentran enhebradas en una larga varilla horizontal fija, y están unidas como indica la figura mediante dos resortes (enhebrados) de constante k y longitud natural l_0. A una distancia l, paralela a la primera varilla, hay otra varilla horizontal fija, en la cual se halla enhebrada otra masa m, que está unida a la masa central M con un resorte de constante k y longitud natural l_0. Los resortes no poseen masa.

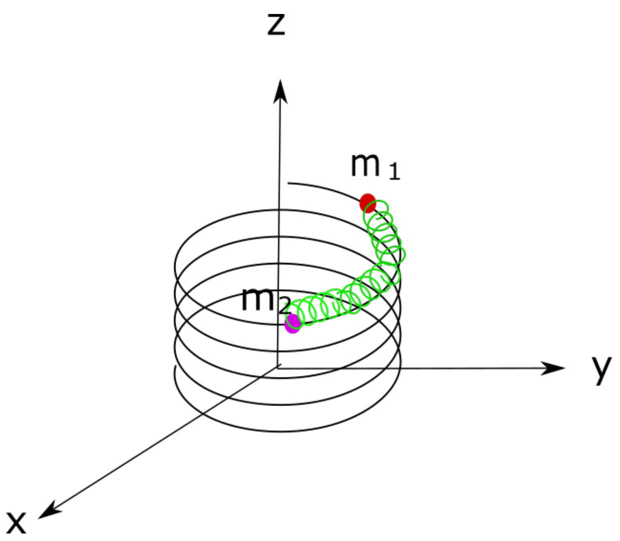
a) Elija un conjunto de coordenadas generalizadas y escriba el Lagrangiano.

b) Determine las posiciones de equilibrio y escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones en un entorno de la configuración de equilibrio estable. ¿Qué relación deben cumplir l y l0 para que el equilibrio sea estable?. Escriba las matrices de masa y de potencial. Se solicita numerar los pequeños desplazamiento del equilibrio de m a la izquierda η_1, para M del centro η_2 y para m a la derecha η_3. Para la masa inferior η_4.

c) Considerando el caso $\frac{M}{m} = 5$ y $\frac{l_0}{l} = \frac{1}{2}$:

- Proponga el único modo normal simétrico $\mathbf{a}_1$ y calcule su frecuencia ω_1.
- Proponga el modo de frecuencia cero (modo de traslación) $\mathbf{a}_2$. Verifique su propuesta. Este modo es anti-simétrico.
- Se sabe por un análisis de simetrías que los otros dos modos antisimétricos son de la forma: $\mathbf{a}_a^t = (1,\ \alpha,\ 1,\ \beta)$. Usando como dato que los valores de α son: $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Encuentre los correspondientes valores de β usando la ortogonalidad con $\mathbf{a}_2$ según la matriz de masas. Verifique que los modos normales encontrados satisfacen la ecuación de autovectores y encuentre la frecuencia correspondiente a cada modo normal. Haga un dibujo esquemático de cada modo normal.

Problema 1



Problema 4