Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2021 – Recuperatorio del Segundo parcial (20/12/2021)

(Justifique todas sus respuestas. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto. Ponga su nombre en la primer hoja y enumere todas las carillas. Entregue un único **pdf** con los distintos problemas en hojas separadas, el nombre del archivo debe ser Apellido_Nombre_LUxxxx. La entrega se hará en el *campus* solapa *Recuperatorio Segundo parcial*. Sólo en casos extremos y justificados se podrá mandar por mail.)

P1. Un cuerpo rígido formado a partir de un disco delgado de masa M y radio a, y una varilla delgado de masa despreciable se coloca sobre un plano inclinado. El plano forma un ángulo α con la horizontal. El punto P de la varilla permanece fijo mientras el disco rueda sin deslizar a lo largo de una circunferencia de radio b. Introducir un conjunto de coordenadas de laboratorio cuyo eje de $\hat{z}$ es perpendicular al plano inclinado y cuyo eje de y apunte en la dirección de máxima pendiente sobre el plano. Use como ejes principales del cuerpo con origen en el centro de masa, al eje $\hat{3}$ que es perpendicular al disco apuntando hacia afuera, y el eje $\hat{2}'$ que pasa por el punto de contacto del disco con el plano ($\hat{1}'$ se elige pidiendo una terna derecha para $\{\hat{1}', \hat{2}', \hat{3}\}$).

a) Expresar la velocidad angular del cuerpo, la condición de rodadura y la energía cinética del cuerpo rígido en función de los datos, de θ y de $\dot{\phi}$.

b) Exprese la energía potencial en función de las coordenadas generalizadas. **Ayuda:** $V = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$, con $\mathbf{R} = b \sin\theta\, \hat{3}$, y con $\hat{3} = \sin\theta \sin\phi \hat{x} - \sin\theta \cos\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$.

c) Calcule la frecuencia de las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable. **Ayuda:** Tome los momentos de inercia: $I = I_1 = I_2$ e I_3.

P2. Dado el siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{[p_x - \alpha t^2(x-y)]^2}{2} + \frac{[p_y + \alpha t^2(x-y)]^2}{2} - \alpha t (x-y)^2$$

a) Plantear las ecuaciones de Hamilton para $\dot{x}$ y $\dot{y}$ (no las resuelva).

b) Usando los corchetes de Poisson pruebe que la siguiente transformación *dependiente del tiempo* es canónica:

$$q_1 = x, \quad p_1 = p_x - \alpha t^2(x-y)\,, \quad q_2 = y, \quad p_2 = p_y + \alpha t^2(x-y)$$

c) Encuentre la función generatriz F_2 de la transformación canónica propuesta.

d) Escriba el nuevo hamiltoniano y resuelva las nuevas ecuaciones de Hamilton. Emplee esto para encontrar la solución general del problema original.

P3. Una partícula de carga q está obligada a moverse en un plano bajo la influencia de un potencial de fuerza central no electromagnético $V = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$, y un campo magnético constante $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ perpendicular al plano. Use el *gauge simétrico*: $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$, también puede usar que $\omega_0 = \frac{qB_0}{m}$.

a) Exprese el Lagrangiano del sistema en coordenadas polares. Muestre que $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\left(p_\theta - mr^2 \frac{\omega_0}{2}\right)^2}{2mr^2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$

b) Escriba la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función característica de Hamilton en coordenadas polares en el plano del movimiento. Separe la ecuación y exprese su solución en términos de una integral radial.

c) Calcule las frecuencias ω_r y ω_θ usando el método de Ángulo-Acción. Tome como dato que la variable de acción radial es

$$J_r = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{4}}} \left(h + \frac{\omega_0}{2} p_\theta \right)$$

donde h es el Hamiltoniano. Calcule las frecuencias ω_r y ω_θ.

P4. Se tiene dos partículas en el sistema de laboratorio: una de masa m_1 en reposo, y otra de masa m_2 con energía E_2.

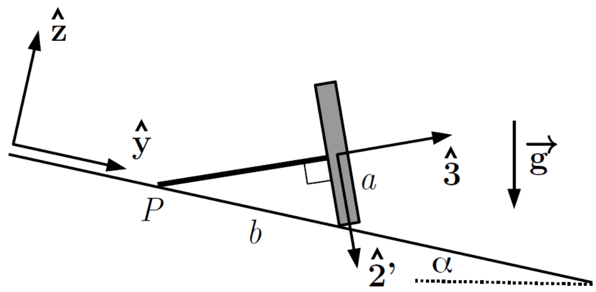
a) Calcule el invariante (escalar): $(p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_2)$, donde p_i es el cuadrimomento relativista de la partícula $i = 1, 2$.

b) Usando el ítem anterior, muestre que la energía total en el sistema centro de momentos (en el que la parte espacial del momento total es cero) es:

$$\sqrt{m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2E_2m_1c^2}$$

c) Demuestre que en una colisión entre un protón con energía E y un protón en reposo no es posible crear un par protón-antiprotón (además de los protones originales) si $E < 7mc^2$, donde m es la masa del protón y también del antiprotón. **Ayuda** ¿Qué energía se requiere para crear el par protón-antiprotón en reposo?

Problema 1



Video demostrativo de un sistema similar, notar la inclinación del plano.