Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2021 – Segundo parcial (6/12/2021)

(Justifique todas sus respuestas. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto. Ponga su nombre en la primer hoja y enumere todas las carillas. Entregue un único **pdf** con los distintos problemas en hojas separadas, el nombre del archivo debe ser Apellido_Nombre_LUxxxx. La entrega se hará en el *campus* solapa *Segundo parcial*. Sólo en casos extremos y justificados se podrá mandar por mail.)

P1. Un aro de masa despreciable y radio R puede rotar libremente alrededor de un eje vertical (el eje de rotación del aro coincide con el diámetro vertical del aro). En el interior del aro se halla una varilla delgada de masa despreciable cuyo punto medio se halla a una distancia d del centro del aro, y cuyos extremos se pueden mover en contacto con el aro y sin fricción (hay gravedad). Un cilindro de masa m centrado y coaxial con la varilla es forzado a girar con velocidad angular ω_0 alrededor del eje de simetría, tal como muestra la figura. Considere que los momentos de inercia del cilindro con respecto al CM satisfacen $I = I_3 + md^2$, siendo eje 3 el eje de simetría.

a) Escriba el Lagrangiano del sistema (no se olvide usar que $I = I_3 + md^2$).
b) Exprese las magnitudes que se conservan. ¿Es el Hamiltoniano igual a $T + V$?
c) Escriba el problema unidimensional equivalente para el ángulo θ de Euler.
d) Usando condiciones iniciales para las que $p_\phi = 0$, calcule el o los valores de θ de equilibrio. Analice la estabilidad de el o los puntos de equilibrio. Si hay equilibrio estable, calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor del mismo.

P2. (3 puntos) Sea la siguiente transformación de coordenadas en un sistema de dos grados de libertad:

$$Q_1 = q_1^2, \qquad Q_2 = q_1 + q_2.$$

a) Encuentre la función generatriz más general posible del tipo $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2)$, y las correspondientes ecuaciones de transformación P_1 y P_2, consistentes para que la transformación sea canónica.

b) Encontrar la transformación particular que hace que el hamiltoniano:

$$H = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2$$

se transforme en uno en el cual las coordenadas Q_1 y Q_2 son ignorables.

c) Usando esta transformación resuelva el problema en las nuevas variables y obtenga q_1, q_2, p_1 y p_2, como funciones del tiempo y de constantes a determinar.

P3. Una partícula se mueve en el campo central: $V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{c}{r^2}$.
a) Encuentre el Hamiltoniano a partir del Lagrangiano. Plantee la ecuación de Hamilton-Jacobi y obtenga la función principal de Hamilton en términos de una integral radial (tome coordenadas en el plano de movimiento r y ϕ).
b) Calcule la trayectoria de la partícula $r(\phi)$ para cuando la partícula esá ligada al centro de fuerzas. ¿A qué tipo de órbita corresponde? *Ayuda* Una de las ecuaciones de transformación a las nuevas coordenadas da la trayectoria.
c) Calcule las frecuencias ω_r y ω_ϕ usando el método de Ángulo-Acción. Tome como dato que la variable de acción radial es

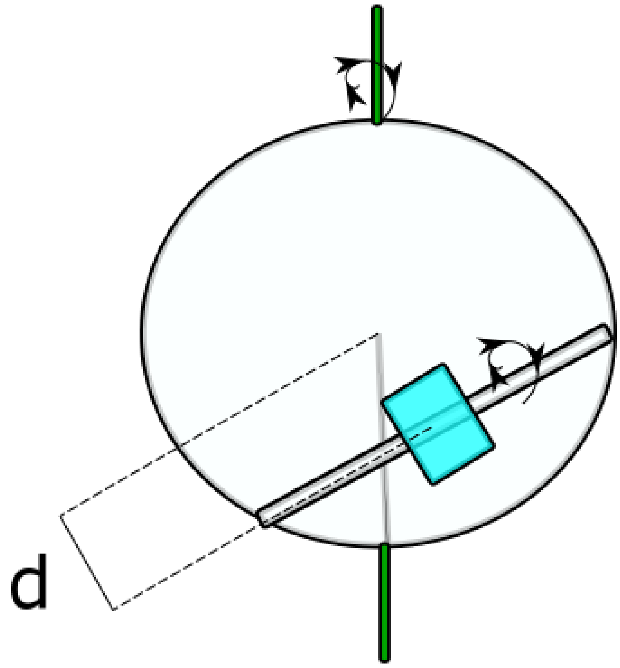
$$J_r = \sqrt{\frac{mk^2}{(-2E)}} - \sqrt{\ell^2 + 2mc}$$

donde E y ℓ son la energía y el momento angular p_ϕ, respectivamente. ¿Cuál es la condición para que las órbitas sean cerradas (periódicas)?

Ayuda: $$\int \frac{dx}{\sqrt{-ax^2 + bx - c}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arccos\left(\frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)$$

P4. Se tiene el choque elástico de dos partículas de igual masa m en un dado sistema inercial, en el que una de las partículas está en reposo. La otra partícula tiene energía E y momento relativistas $\mathbf{p}$. Después de la colisión las partículas tienen igual módulo de momento $p_1 = p_2$.
a) Calcule los ángulos θ y φ en función de mc^2 y de $K_1 = E_1 - mc^2$, siendo E_1 la energía de una de las partículas después del choque.
b) Calcule en el límite no relativista $K_1 << mc^2$ el ángulo entre $\mathbf{p_1}$ y $\mathbf{p_2}$. Discuta su resultado.
c) Calcule en el límite ultra relativista $K_1 >> mc^2$ el ángulo entre $\mathbf{p_1}$ y $\mathbf{p_2}$. Este efecto fue experimentalmente verificado en choque de partículas β (electrones rápidos), con electrones en un gas.

Problema 1



Problema 4