Mecánica Clásica - primer cuatrimestre de 2022

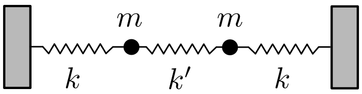
Guía 1: *Coordenadas generalizadas. Grados de libertad. Lagrange.*

1. En el sistema de la figura, las posiciones x_1 y x_2 de las dos masas se miden a partir de sus puntos de equilibrio. Sea $q_1 = x_1 + x_2$ y $q_2 = x_1 - x_2$.

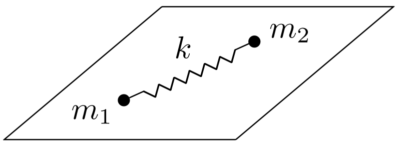
   (a) ¿Definen q_1 y q_2 un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?

   (b) Si $q_1 = 0$, describa cualitativamente el movimiento de cada partícula. Ídem si $q_2 = 0$.

   (c) Calcular las fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2.

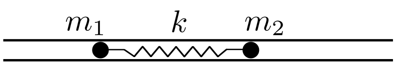


2. Para los casos siguientes, ¿cuántos grados de libertad tiene cada sistema? Proponga conjuntos adecuados de coordenadas generalizadas.

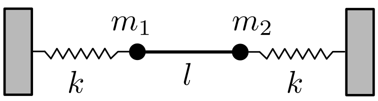


a) m_1 y m_2 se mueven en el plano de la mesa.

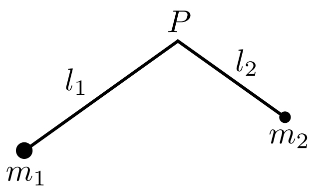
b) Ídem, pero la mesa rota con ω constante.



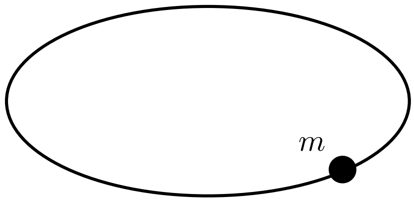
c) m_1 y m_2 se hallan dentro de un tubo.
Si q_1 y q_2 se miden a partir del centro de masa,
¿son coordenadas apropiadas?



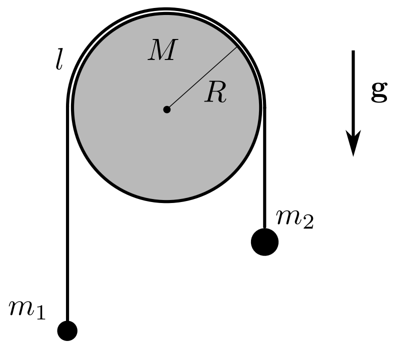
d) Las dos masas se hallan unidas por una barra rígida.
Analize los casos en que las masas
pueden moverse horizontalmente o en el plano.



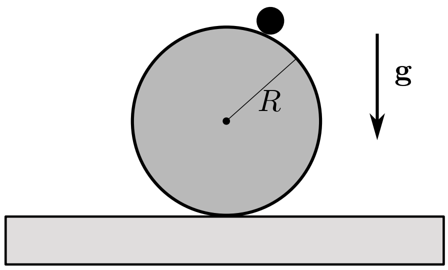
e) Discuta los casos P fijo y P móvil.



f) Una masa enhebrada en un alambre elíptico.



g) Una máquina de Atwood. Analice los casos en que la cuerda desliza y no desliza sobre la polea.



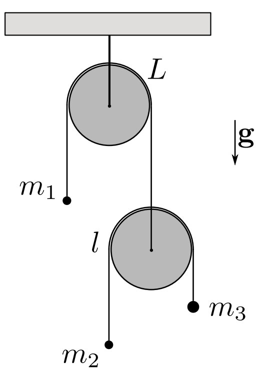
h) Una partícula puntual que cae por una esfera.

3. Para el sistema de la figura, hallar la aceleración de cada masa, utilizando:

   (a) Las ecuaciones de Newton y condiciones cinemáticas.

   (b) Las ecuaciones de Lagrange.

   (d)* Repita (a) y (b), pero ahora las poleas tienen masa M y radio R.



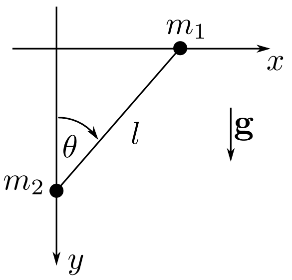
4. Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por una barra sin masa de longitud l; m_1 se mueve sólo sobre el eje x y m_2 sólo sobre el y. Las condiciones iniciales son las que indica la figura.

   (a) Halle la ecuación de movimiento para θ utilizando el PTV.

(b) Halle la ecuación de Lagrange para θ.

(c) Si $m_1 = m_2 \equiv m$, halle la tensión T en el hilo como función de θ.

(d) ¿Cuál es el período de movimiento en este caso? Suponga que θ sólo puede tomar valores pequeños.

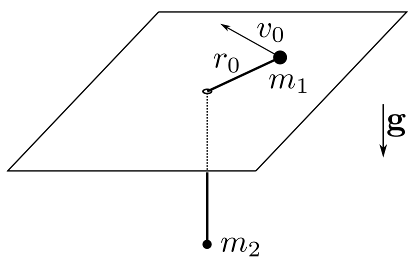


5. Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo de longitud L, como indica la figura. La masa m_1 se mueve en el plano de la mesa y m_2 sólo verticalmente. En $t = 0$, m_1 se encuentra a una distancia $r_0 < L$ del orificio y se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.

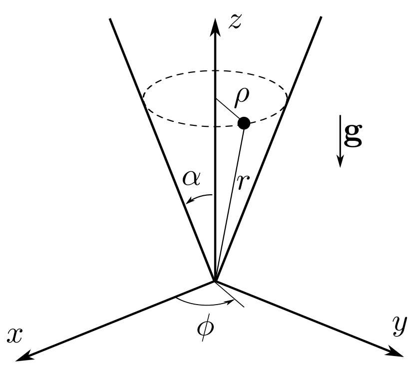
   (a) Escriba las ecuaciones de Lagrange y halle sus integrales primeras en términos de las condiciones iniciales.

   (b) Halle la tensión del hilo.

   (c) Repita (a) y (b), pero ahora la masa m_2 puede moverse en las dos direcciones de un plano vertical.



6. Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre una supeficie cónica definida por $\theta = \alpha$, donde θ es el ángulo polar de las coordenadas esféricas.



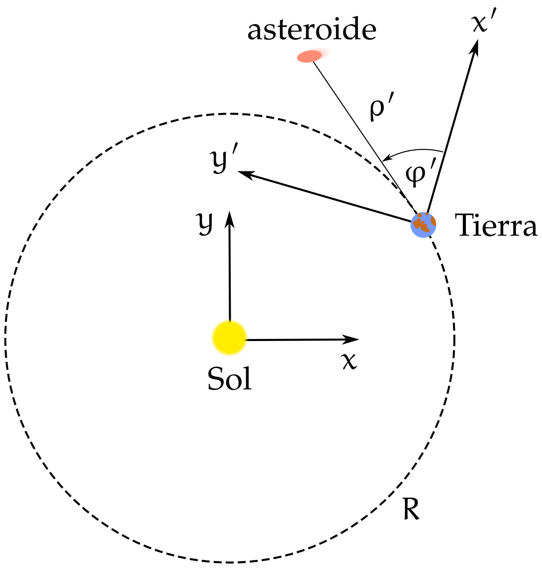
(a) Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo ϕ y el radio r de las coordenadas esféricas habituales.

(b) Halle el r máximo y el r mínimo para el caso en que $\alpha = 30$ y las condiciones iniciales sean $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0)^2 = 4\sqrt{3}g/a$.

(c) Halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.

(d) Suponiendo que la partícula está en movimiento circular, halle la constante del oscilador y el período de oscilación para pequeñas perturbaciones alrededor de este movimiento. Compare el período de las oscilaciones con el período de revolución y describa cualitativamente la órbita de la partícula.

7. *Un pequeño objeto interestelar atraviesa el sistema solar a tan alta velocidad que puede considerarse como una partícula libre. El objetivo del problema es encontrar sus ecuaciones de movimiento cuando se usan como coordenadas generalizadas distancias y ángulos medidos desde la Tierra. Para eso, suponga que la Tierra se mueve alrededor del Sol en una órbita circular de radio R, con velocidad angular ω_1, y que, a su vez, rota alrededor de su eje con velocidad angular ω_2. Para simplificar, asuma que el eje de rotación de la Tierra es perpendicular al plano de su órbita y que el objeto interestelar también se mueve sobre este plano. Para referencia, en $t = 0$ los ejes del sistema de referencia fijo a la Tierra coinciden con los ejes del sistema de referencia inercial fijo al Sol. Usando como coordenadas generalizadas las coordenadas polares asociadas al sistema de referencia fijo a la Tierra, ρ' y φ', escriba la posición del objeto, su lagrangiano y las ecuaciones de E-L. Note que, si bien las coordenadas generalizadas tienen una interpretación terrestre, el lagrangiano se sigue calculando usando la energía cinética referida al sistema inercial fijo al Sol. ¿Les será fácil a los astrónomos en la Tierra deducir que el objeto se mueve en línea recta? Sin revelar la solución, envíe la pregunta por carta a 100 astrónomos y analice sus respuestas.



*https://en.wikipedia.org/wiki/Oumuamua

8. Analizar los siguientes puntos.

   (a) Dado un sistema formado por N partículas, ¿cuál es el número de grados de libertad del mismo y cuál el de ecuaciones de vínculo?

   (b) ¿Se puede utilizar una velocidad como coordenada generalizada?

   (c) ¿Las fuerzas generalizadas se aplican sobre cada partícula?

   (d) El número de grados de libertad de un sistema, ¿es independiente del sistema de referencia utilizado para describir el movimiento?

   (e) Para estudiar el equilibrio de un sistema, ¿es siempre válido utilizar el principio de los trabajos virtuales?

   (f) ¿Es válida la formulación lagrangiana para un potencial dependiente de la velocidad?, ¿y para el campo electromagnético?

   (g) Dé un ejemplo en que un desplazamiento virtual difiera de uno real. ¿En qué casos son iguales?

   (h) Las ecuaciones de vínculo para un sistema físico, ¿dependen del sistema de referencia utilizado?, ¿y las fuerzas de vínculo?

   (i) Para calcular las fuerzas de vínculo de un sistema, ¿qué métodos es posible emplear?

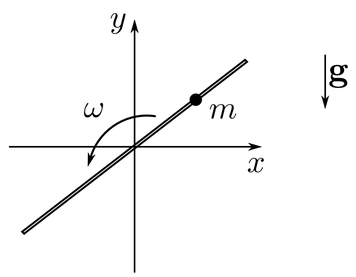
   (j) ¿Siempre se pueden escribir las ecuaciones de Newton desde el centro de masa de un sistema?

   (k) Para un sistema de N partículas, ¿cuántas ecuaciones de Newton se necesitan?, ¿y de Lagrange?

   (l) ¿Qué se entiende por un sistema inercial? ¿Serán correctas las ecuaciones de movimiento si se escribe el lagrangiano desde un sistema no inercial?

   (m) Para una carga en un campo electromagnético, ¿se puede conservar su impulso lineal? ¿Qué magnitud se conserva?

9. Para el sistema de la figura.

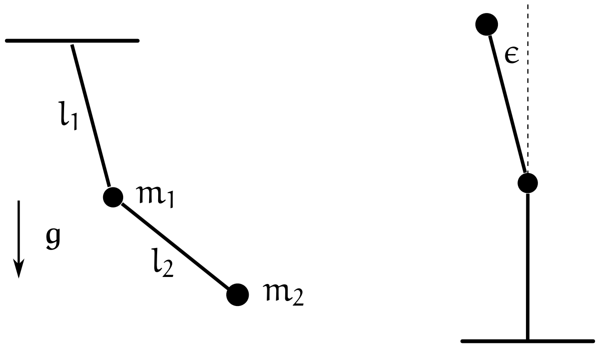


   (a) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando el método de Lagrange.

   (b) Para el caso $g = 0$, integre las ecuaciones para condiciones iniciales $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$.

   (c) Discuta el caso en que la barra puede girar libremente.

10. Considere un péndulo doble como muestra la figura de la izquierda.



(a) Defina coordenadas generalizadas.

(b) Escriba la posición de cada masa en términos de las coordenadas generalizadas.

(c) Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de E-L.

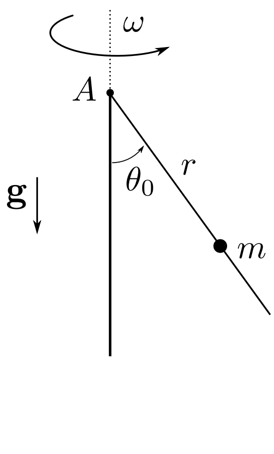
(d) Para $m_1 = m_2$ y $l_1 = l_2$, halle una expresión aproximada de las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable. Calcule las frecuencias de los dos modos normales de oscilación. *Ayuda*: desacople las ecuaciones de movimiento definiendo combinaciones lineales de las coordenadas originales.

(e) En la figura de la derecha, el péndulo se mantiene levemente apartado de una de sus posiciones de equilibrio inestable. El segmento superior forma con la vertical un ángulo $\epsilon \ll 1$. Se libera el péndulo. Calcule la aceleración angular inicial de cada barra respecto de la vertical. Asuma que $m_1 = m_2$ y $l_1 = l_2$.

11. Una partícula de masa m se desliza sin fricción por un alambre fijo en el punto A y que forma un ángulo θ_0 con el eje vertical. El alambre rota alrededor del eje con velocidad angular constante ω.

(a) Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange.

(b) Halle $r(t)$ sabiendo que en $t = 0$, $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$.



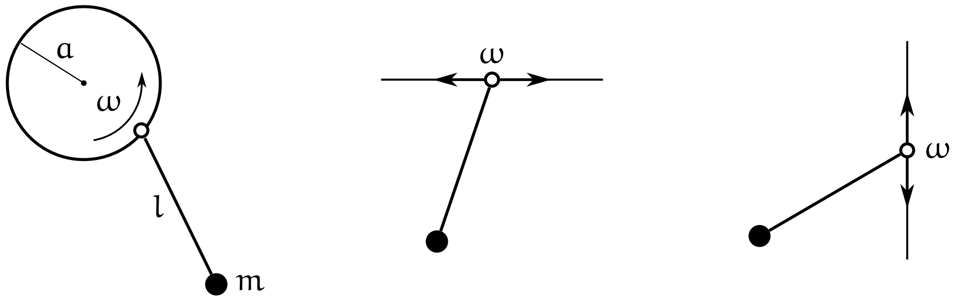
12. Considere el péndulo en tres dimensiones (péndulo esférico). Encontrar las ecuaciones de Lagrange y las constantes de movimiento. Discuta cualitativamente el movimiento de este péndulo.

13. Escriba el lagrangiano de un péndulo plano donde el punto de suspensión:

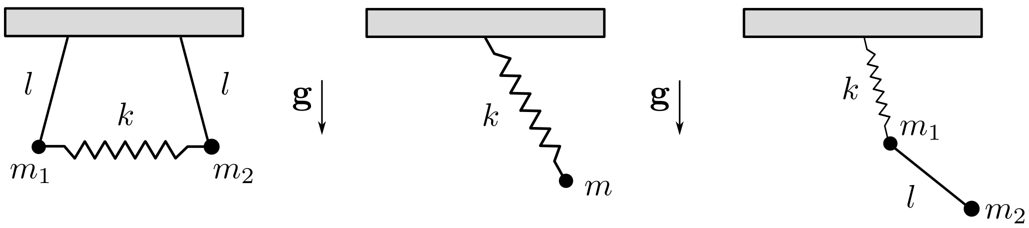
    (a) se desplaza uniformemente por un círculo vertical de radio a con frecuencia ω,

    (b) efectúa oscilaciones verticales de la forma $a \cos \omega t$,

    (c) efectúa oscilaciones horizontales de la forma $a \cos \omega t$.

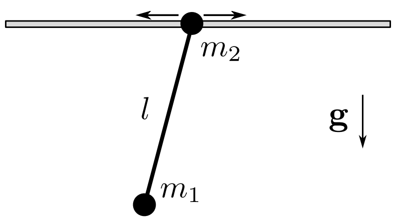


14. Encuentre el lagrangiano de los sistemas de la figura.

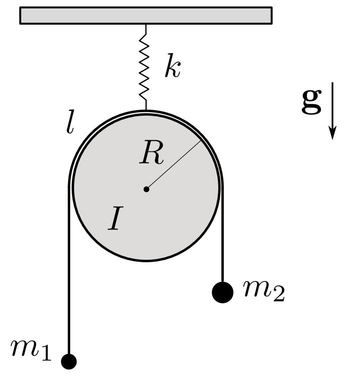


15. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos sistemas de referencia cartesianos bidimensionales. Suponga que, respecto del sistema (x_1, y_1), el origen de coordenadas del sistema (x_2, y_2) se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ constante y que los ejes de (x_2, y_2) rotan con velocidad angular constante ω. Hallar explícitamente las ecuaciones de transformación: $x_1 = x_1(x_2, y_2, t)$ y $y_1 = y_1(x_2, y_2, t)$.

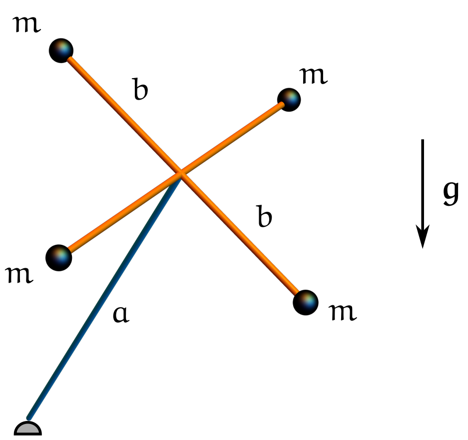
16. Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: un péndulo simple de masa m_1, con una masa m_2 en el punto sostén, la cual puede moverse sobre una línea horizontal contenida en el plano de movimiento de m_1. Resuelva las ecuaciones de movimiento y halle la frecuencia de oscilación del sistema para pequeños apartamientos de la posición de equilibrio estable.



17. Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: una máquina de Atwood con una cuerda de largo l que pasa sin deslizar por una polea con momento de inercia I.



18. Una barra de longitud a tiene un extremo fijo al origen, alrededor del cual puede rotar sin restricciones. En el otro extremo de la barra se fijan por sus centros un par de barras, perpendiculares entre sí y a la primera barra. Las barras que forman la cruz tienen longitud $2b$. En los extremos de la cruz hay cuatro partículas de masa m. Hay gravedad.



(a) Elija coordenadas generalizadas y escriba la posición de cada masa.

(b) Escriba el lagrangiano y encuentre las ecuaciones de E-L.

(c) Identifique constantes de movimiento.

(d) Reduzca el problema original a un problema unidimensional.

19. Una partícula de masa m y carga q está en un campo electromagnético con potenciales φ y $\mathbf{A}$. [$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - (1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t, \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$]. A partir del lagrangiano $L = T - U$, donde $U = q(\varphi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}/c)$, es un potencial generalizado dependiente de la velocidad. Muestre que la fuerza aplicada sobre la partícula es la de fuerza Lorentz, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}/c)$.

20. Una partícula de masa m y carga q está en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$.

   (a) Si $\mathbf{A} = B_0 x\,\hat{y}$, compruebe que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, calcule las ecuaciones de movimiento y muestre que las órbitas son hélices. Las condiciones iniciales son $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{v}(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.

   (b) Repita el punto anterior, pero ahora para el potencial vector $\mathbf{A}' = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$.

   (c) Calcule la función ψ que da el cambio de medida $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$.

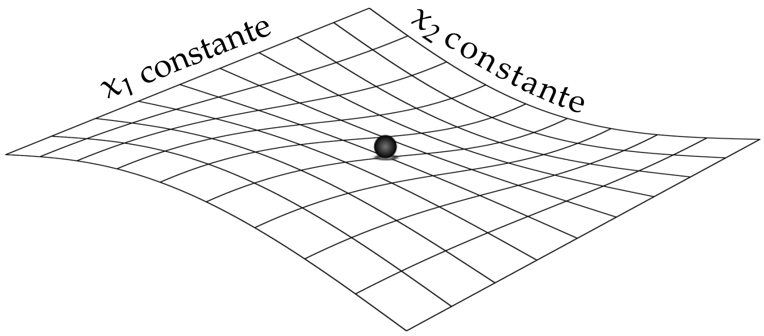
   (d) Si $\mathbf{v}(0) = 0$, interprete físicamente la solución hallada en (a).

21. **Unicidad del Lagrangiano** Sea un oscilador isótropo bidimensional ($k_x = k_y \equiv k$).

   (a) Escriba el lagrangiano del sistema y halle las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas $q_1 = x$ y $q_2 = y$.

   (b) Sea $\mathcal{L}^* = m\dot{x}\dot{y} - kxy$. Halle las ecuaciones de movimiento para este sistema. Compare con las obtenidas en (a).

22. **Geodésicas sobre una superficie**. Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre una superficie definida paramétricamente por la función $\mathbf{r}(x_1, x_2)$, de manera que la posición de la partícula queda determinada por las coordenadas $x_1(t)$ y $x_2(t)$. No hay fuerzas externas.



   (a) Muestre que la energía cinética de la partícula puede escribirse como

$$T(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \sum_{i,j} g_{ij}(x_1, x_2)\,\dot{x}_i\dot{x}_j, \tag{1}$$

   y dé las componentes de la matriz g_{ij}. Compare con la expresión para el elemento de línea sobre la superficie. Las cantidades g_{ij} son las componentes de lo que se conoce como tensor métrico.

   (b) Escriba las ecuaciones de E-L para x_1 y x_2 en términos de los elementos de la matriz g_{ij} y de sus derivadas respecto de x_1 y x_2.

   (c) Muestre que las ecuaciones de movimiento pueden quedar escritas en la forma

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{ijk}(x_1, x_2)\,\dot{x}_j\dot{x}_k = 0,$$

   y dé las funciones Γ_{ijk} en términos de la matriz g_{ij} y de sus derivadas respecto de x_1 y x_2. (Si busca la definición formal de la ecuación geodésica, encontrará que algunos índices se escriben como subíndices y otros como supraíndices. No se alarme. A los fines del problema no es necesario prestar atención a esos detalles).