Mecánica Clásica - primer cuatrimestre de 2022

Guía 2: *Principios variacionales y simetrías*

Principios variacionales

1. Suponga que sabe experimentalmente que una partícula cae una distancia dada y_d en un tiempo $t_d = \sqrt{2y_d/g}$, pero no se conoce el tiempo de caída para otras distancias distintas de y_d. Suponga además que el lagrangiano del problema se conoce, pero en lugar de resolver la ecuación de movimiento se prueba una forma funcional $y(t) = bt + ct^2$. Si las constantes a, b, y c se ajustan de modo que y_d esté determinado correctamente por t_d, muestre que la integral $I = \int \mathcal{L}\, dt$ resulta un extremo para valores reales de los coeficientes sólo cuando $b = 0$ y $c = -g/2$.

2. Una partícula está sometida solamente a un potencial de tipo armónico, $V(x) = kx^2/2$. Encuentre la ecuación de movimiento minimizando la acción de la siguiente manera:

   (a) Divida el intervalo de integración en n partes.

   (b) Reemplace las derivadas por su valor medio, $\dot{x}_i = \Delta x_i/\Delta t_i$, y la integral por una sumatoria.

   (c) Imponga la condición de extremo $\partial I/\partial x_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$

   (d) Tome el límite para $t_i \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$.

   (e) Interprete el resultado.

3. Problema de la Catenaria. Una cuerda uniforme, inextensible, de masa m y longitud ℓ está colgada con sus extremos fijos al eje x en $x = -L/2$ y $x = L/2$, respectivamente, Por supuesto $L \leq \ell$. Hay un campo gravitatorio uniforme $\boldsymbol{g} = -g\,\hat{z}$, con $g > 0$. La forma que adopta la cuerda, $z(x)$, es la que minimiza la energía potencial $V[z]$.

   (a) Escribir la funcional $V[z]$ y la condición auxiliar para la longitud de la cuerda.

   (b) Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, escribir la funcional que hay que extremar.

   (c) Muestre que el lagrangiano asociado no depende explícitamente de x y que, por lo tanto, la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a una ecuación de primer orden.

   (d) Encuentre la solución de la ecuación de Euler-Lagrange para las condiciones del enunciado. Muestre que hay una sola extremal de este tipo.

4. Principio de Fermat

   (a) Según el principio de Fermat, la luz sigue una trayectoria que hace extrema la integral $\int_1^2 n(\mathbf{r})\, ds$, donde $n(\mathbf{r})$ es el índice de refracción del medio. Suponiendo que la luz se propaga en el plano xz, muestre que si $n(z) = (1 + z/h)n_0$, donde n_0 y h son constantes, la trayectoria de la luz está dada por $z = -h + (\alpha h/n_0)\cosh(\beta + n_0 x/\alpha h)$, donde α y β son constantes de integración.

   (b) Un problema inverso: ¿cuál debería ser la función $n(z)$ para que la trayectoria de los rayos sea un arco de circunferencia?

5. Hallar la curva de longitud mínima que une dos puntos de la superficie de un cilindro.

6. Cuando se arroja una partícula hacia arriba con velocidad inicial $v_0 > 0$ su trayectoria es $y(t) = v_0 t - gt^2/2$, y el tiempo que transcurre hasta que vuelve a tocar tierra es $t_c = 2v_0/g$. Esos son resultados de Física 1, obtenidos con métodos de Física 1. El objetivo ahora es encontrar la trayectoria aplicando explícitamente el principio de Hamilton.

   Además de la forma del potencial, $U(y) = mgy$, la única información que debemos aportar es que la trayectoria parte de $y = 0$ en $t = 0$ y regresa a $y = 0$ en cierto $t_c > 0$. La trayectoria debe pertenecer entonces a la familia de funciones tales que $y(0) = y(t_c) = 0$. Asumiendo unas pocas hipótesis de continuidad, *todas* las funciones de este tipo pueden representarse mediante un desarrollo de Fourier en senos,

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right), \tag{1}$$

   y por lo tanto es posible calcular la acción para cualquier trayectoria como función del conjunto de coeficientes a_n. El cálculo se simplifica notablemente debido a la linealidad del potencial y a las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^{t_c} dt \, \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{t_c} t\right) = \delta_{kn} \frac{t_c}{2},$$

$$\int_0^{t_c} dt \, \cos\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right) \cos\left(\frac{k\pi}{t_c} t\right) = \delta_{kn} \frac{t_c}{2},$$

   donde $n, k \geq 1$ y $\delta_{nk} = 1$ si $n = k$ y $\delta_{nk} = 0$ si $n \neq k$.

   (a) Calcule explícitamente la acción para las funciones del tipo (1) en el intervalo entre $t = 0$ y t_c. El resultado quedará escrito como una serie infinita. Para calcular el término cinético, tendrá que usar las condiciones de ortogonalidad, de modo de eliminar una de las sumatorias.

   (b) Derivando con respecto a cada coeficiente a_n, encuentre la condición de extremo y los coeficientes a_n^* que corresponden a esa trayectoria.

   (c) Grafique la solución aproximada

$$y(t, N) = \sum_{n=1}^{N} a_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right)$$

   para $N = 1, 2,$ etc. y compare con el gráfico de la solución exacta.

   (d) Estime su grado de estupefacción (en radianes).

   (e) Insistimos: grafique la solución aproximada

$$y(t, N) = \sum_{n=1}^{N} a_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right)$$

   para $N = 1, 2,$ etc. y compare con el gráfico de la solución exacta.

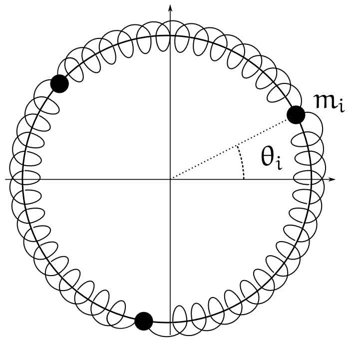
Simetrías

7. Demuestre a partir del principio de acción estacionaria que las ecuaciones de movimiento quedan inalteradas si al lagrangiano se le suma la derivada total respecto del tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.

8. Tres tristes masas, m_1, m_2 y m_3, están enhebradas en un aro circular fijo, como muestra la figura. Las masas interactúan a través de resortes, con potenciales

$$V(\theta_i, \theta_j) = \frac{1}{2}k(\theta_i - \theta_j)^2,$$

donde $i, j = 1, 2, 3$, y k es una constante. En base a la simetría del lagrangiano hallar qué magnitudes se conservan.



9. Indicar qué componentes de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{L}$ se conservan para el movimiento de una partícula en potenciales gravitatorios originados en las siguientes distribuciones homogéneas de masa (Goldstein 2nd ed. prob. 2-18; Landau 3rd ed. prob. 9-3):

   (a) Un elipsoide de revolución con semiejes $a = b \neq c$.
   (b) Una esfera.
   (c) Un plano infinito.
   (d) Un hilo infinito.
   (e) Un cilindro circular infinito.
   (f) Un cilindro cuadrado infinito.
   (g) Dos puntos de masa m.
   (h) Un semiplano.
   (i) Un cono.
   (j) Un toro circular.
   (k) Una hélice circular infinita. (Buscar una combinación de transformaciones que deje invariante el potencial. La cantidad conservada será una combinación de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{L}$).

10. Dos partículas, de masas m_1 y m_2, interactúan con un potencial $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Demuestre que para que se conserve el impulso angular es necesario que $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$.

11. Calcule las constantes de movimiento para una partícula en un campo electromagnético con potenciales:

(a) $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x, y)$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A(x, y)\,\hat{z}$.

(b) $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x^2 + y^2, z)$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A(x^2 + y^2, z)\,\hat{z}$.

12. El lagrangiano de una partícula de masa m y carga e en un campo magnético uniforme que apunta en la dirección z es

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

   (a) Mostrar que el sistema es invariante ante cualquier traslación espacial y encontrar las magnitudes conservadas asociadas a esta simetría.

   (b) Mostrar que el sistema es invariante frente a rotaciones alrededor del eje z y encontrar la magnitud conservada asociada a esta simetría.

13. Una partícula se mueve en un potencial $V(\boldsymbol{x}, t)$ que rota con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{z}$ respecto a un sistema inercial S. En el sistema S se definen coordenadas cartesianas x, y y z. A tiempo $t = 0$ el potencial es $V(\boldsymbol{x}, 0) = U(x, y, z)$.

   (a) ¿Cuál es el potencial en el sistema S para todo t? Escribe el lagrangiano en términos de las coordenadas y velocidades en este sistema. ¿Depende explícitamente del tiempo?

   (b) Un sistema S' rota con la misma velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ que el potencial y su origen y eje z coinciden con los de S. Escribe el lagrangiano en términos de las coordenadas y velocidades en S'. ¿Depende explícitamente del tiempo?

   (c) Si elegiste responder “Sí”, pasa a la página 142. Si elegiste responder “No”, continúa en el próximo *item*.

   (d) ¿Qué magnitud se conserva asociada a esta simetría? Escríbela en términos de las coordenadas y velocidades en S' y luego en términos de las coordenadas y velocidades en S.

   (e) ¿Cuál es en S la transformación de simetría asociada a este magnitud?

14. Considere el lagrangiano:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)^2.$$

Muestre que existe una transformación de simetría que lleva a una cantidad conservada. Encuentre dicha cantidad conservada y proponga una interpretación física tanto para ella como para el lagrangiano.