Mecánica Clásica - primer cuatrimestre de 2022

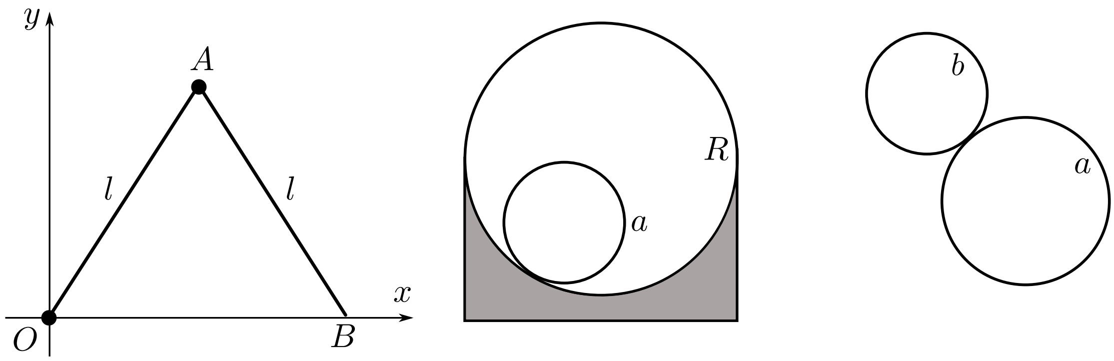
Guía 5: *Cinemática y dinámica del cuerpo rígido, ángulos de Euler, Ecuaciones de Euler.*

1. Sobre el tensor de inercia

   (a) Demostrar que para un cuerpo plano $I_3 = I_1 + I_2$, donde el eje 3 es perpendicular al plano del cuerpo.

   (b) Calcular el tensor de inercia respecto de su centro de masa para un cubo homogéneo de lado a, según los ejes que pasan por su centro de masa y son normales a sus caras. ¿Cuánto valen los momentos de inercia respecto de una terna de ejes ortogonales, que pasan por el centro de masa, y uno de los cuales está orientado según la diagonal que une dos vértices opuestos?

2. Hallar la energía cinética de los sistemas mostrados en la figura:



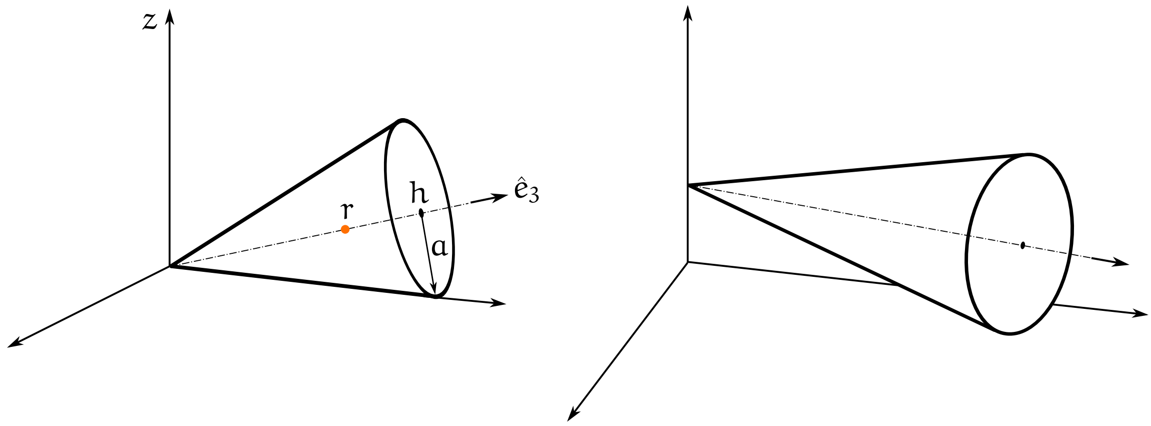
(a) (b) (c)

   (a) OA y AB son dos varillas delgadas homogéneas de longitud l unidas por una bisagra en A. La varilla OA gira en el plano de la figura alrededor de O; el punto B se desliza a lo largo del eje x.

   (b) Un cilindro homogéneo de radio a que rueda sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica de radio R.

   (c) Un disco de radio b que rueda sin deslizar sobre el borde de un disco de radio a. El disco de radio a está fijo. Suponer que el disco de radio b gira alrededor del centro del disco de radio a con velocidad angular constante Ω.

3. El centro de la base de un cono se mueve sobre un círculo con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\hat{z}$. En el primer caso, el cono rota sin deslizar apoyado sobre el piso a lo largo de una generatriz. En el segundo caso, rota sin deslizar con su eje en un plano horizontal y su base perpendicular al piso. En los dos casos, el vértice está fijo sobre el eje z. El radio de la base es a, la altura del cono es h, su masa es m, sus momentos principales de inercia respecto del centro de masa son I e I_3. El centro de masa está a una distancia r del vértice. (Todos datos). Encontrar la energía cinética en cada caso.



4. Un cilindro semicircular uniforme de masa m y radio a está apoyado sobre un plano horizontal. Escriba las ecuaciones diferenciales para pequeños desplazamientos de la posición de equilibrio estable.

5. Una esfera de radio a rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. Encontrar las ecuaciones de movimiento mediante dos métodos: i) a partir de las ecuaciones para la fuerza y el torque, ii) usando el principio de D'Alembert y multiplicadores de Lagrange.

6. Una esfera homogénea de radio a se mueve sin deslizar por la superficie interna de un cilindro vertical de radio b. Hay gravedad. Determine la ley de movimiento de la esfera, en especial cómo depende con el tiempo su altura dentro del cilindro.

7. Un disco de radio a rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Hay gravedad. Determine las ecuaciones de movimiento para los siguientes casos: (i) el disco se mantiene vertical y (ii) el disco no se mantiene vertical.

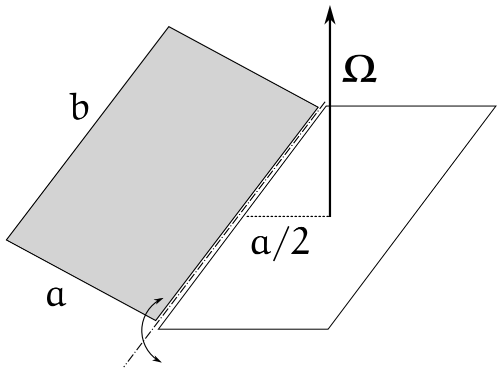
8. Muestre que, en términos de los ángulos de Euler, las componentes de la velocidad angular en el sistema de ejes fijo al espacio son

$$
\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi \\
\omega_y &= \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi \\
\omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}.
\end{aligned}
$$

9. Una placa rectangular tiene lados a y b. La placa se mantiene fija por uno de sus lados a un marco que está en el plano horizontal. El marco tiene dimensiones ligeramente más grandes que las de la placa, para permitirle a esta girar libremente alrededor de su lado fijo, como si fuera una puerta. A su vez, el marco rota alrededor de su centro con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$, como muestra la figura.

   (a) Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en ausencia de gravedad. ¿Existe algún punto de equilibrio estable?

   (b) Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento con gravedad. ¿Existe algún punto de equilibrio estable?

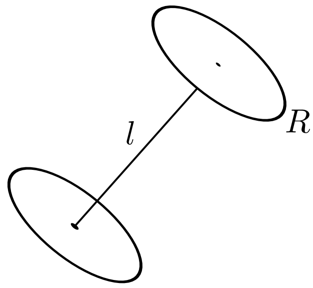


10. Los centros de dos volantes de radio R y masa m se encuentran unidos por una barra de longitud l. El ángulo formado por la barra y el plano de cada volante es siempre de $90°$. Cada volante gira libremente sobre sí mismo.

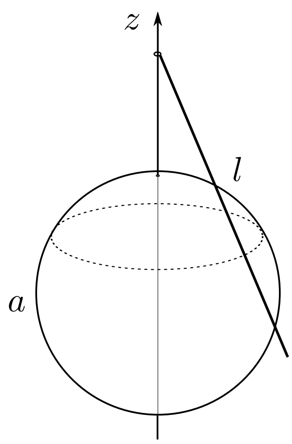
    (a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

    (b) Escriba el lagrangiano y encuentre constantes de movimiento. ¿Es $h = E$?

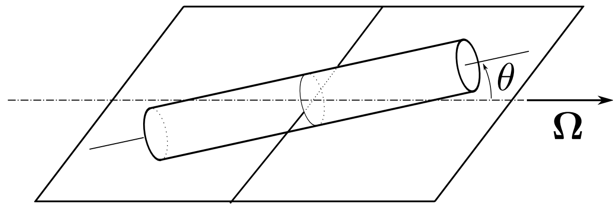
    (c) Escriba las ecuaciones de movimiento.



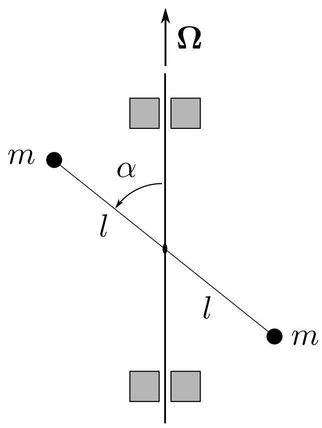
11. Uno de los extremos de una barra de longitud l y masa m puede deslizar a lo largo del eje z y tiene libertad para girar alrededor de este eje. La barra permanece apoyada sobre una esfera fija de radio a de manera tangente a esta. Determinar el lagrangiano, las ecuaciones de movimiento y las magnitudes que se conservan.



12. Un cilindro circular sólido de masa m, radio a y largo l está suspendido de un eje transversal a través de su centro de masa. Este eje gira con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$. Encontrar las posiciones de equilibrio, ¿cuándo son estables y cuándo no? ¿Por qué? Para el caso estable encontrar las frecuencias de oscilación para pequeños apartamientos del equilibrio.



13. El sistema de la figura consiste en dos masas unidas a un eje vertical que gira con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$.

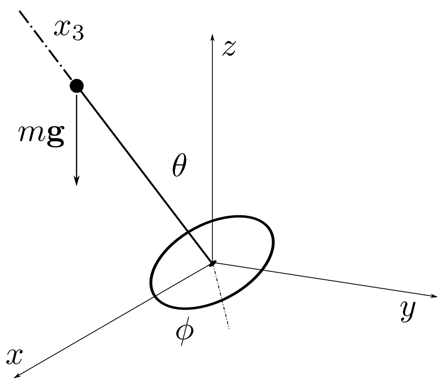


   (a) Calcular el tensor de inercia para ejes fijos al espacio.
   (b) Encontrar los ejes principales de inercia e interpretar.
   (c) Calcular el impulso angular $\mathbf{L}$ en el sistema fijo al espacio y en el sistema fijo al cuerpo.
   (d) Calcular el par que ejercen los cojinetes, según ambos sistemas. Interpretar el resultado.

14. Un trompo rota sobre su eje vertical, ¿bajo que condiciones es estable este movimiento?

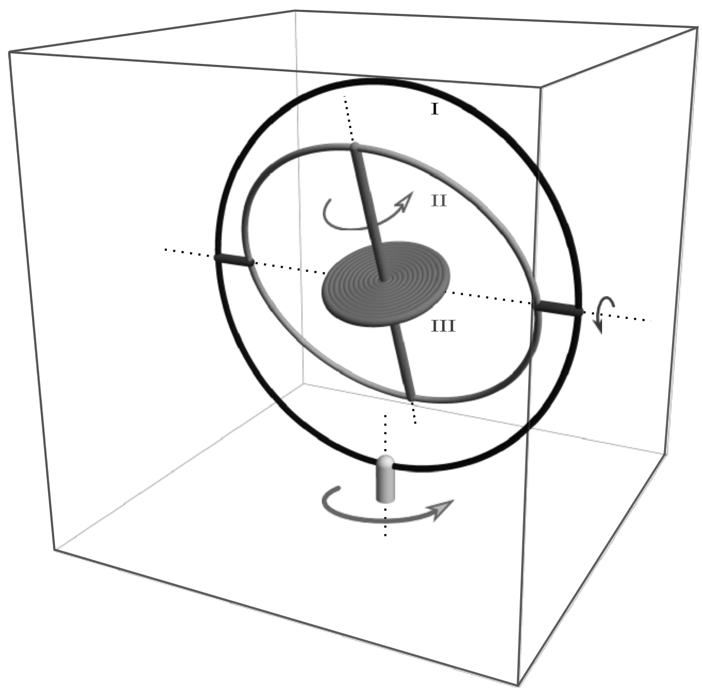
15. Un giróscopo rota alrededor del eje x_3 con velocidad angular $\Omega_3 = \omega$. Su momento de inercia axial es I_3 y el momento de inercia alrededor de cualquier eje en el plano $x_1 x_2$ es I. Inicialmente $\theta = \pi/2$, $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Un peso $m\boldsymbol{g}$ está fijo sobre el eje x_3 a una distancia d del origen.

   (a) Escribir las ecuaciones de Euler para las componentes de $\mathbf{\Omega}$ respecto del sistema fijo al cuerpo.
   (b) Escribir esas ecuaciones en términos de los ángulos de Euler y de sus derivadas.
   (c) Verificar que las mismas ecuaciones se obtienen a partir de un lagrangiano, usando como coordenadas los ángulos de Euler.
   (d) Linealizar las ecuaciones obtenidas, bajo la suposición de que $\theta \simeq \pi/2$ y las velocidades $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ son pequeñas en comparación con Ω_3.
   (e) Resolver las ecuaciones linealizadas e interpretar los resultados



16. Un giróscopo está construido de la siguiente manera:

    i) un marco circular exterior que se mantiene siempre sobre el plano vertical y que puede girar alrededor del eje z.
    ii) un marco circular interior, montado sobre el marco exterior como muestra la figura.
    iii) una peonza simétrica, montada a su vez sobre el marco interior.



Los dos marcos tienen el mismo tensor de inercia respecto de su centro de masa, con momentos principales $I_a = I_b$ e $I_c = 2I_a$. La peonza tiene momentos principales de inercia $I_1 = I_2 \equiv I$ e I_3 respecto de su centro de masa. El giróscopo está centrado, de modo que los centros de masa de los tres elementos siempre están en reposo.

(a) Elegir coordenadas y escribir el lagrangiano.

(b) ¿Es equivalente al problema de un giróscopo en donde no se tenga en cuenta la inercia de los marcos pero se modifiquen los momentos I e I_3 de la peonza?

(c) Encontrar al menos 3 constantes de movimiento, expresadas en términos de las coordenadas generalizadas y sus velocidades.

(d) Reducir el problema a un problema unidimensional para un solo grado de libertad.

17. Demostrar que si un cuerpo rígido tiene una velocidad angular ω_1 respecto de un sistema de ejes con versores $\hat{e}_i$, que a su vez está rotando con velocidad angular ω_2 respecto de un sistema de ejes con versores $\hat{x}_i$, entonces la velocidad angular del cuerpo rígido respecto de este sistema es $\omega_1 + \omega_2$.

18. Un girocompás consiste en un cuerpo rígido simétrico montado de tal manera que está restringido a moverse en un plano horizontal paralelo a la superficie de la Tierra. Elegir un par de coordenadas generalizadas y escribir el lagrangiano para un girocompás en un punto fijo de la superficie terrestre a una latitud $\pi/2-\theta_0$. Mostrar que la componente de la velocidad angular ω_3 a lo largo del eje de simetría se conserva. Mostrar que, si $\omega_3 > (I_1/I_3)\omega_0 \sin\theta_0$, donde ω_0 es la velocidad angular de rotación de la Tierra, entonces el eje de simetría oscila en el plano horizontal alrededor de la línea norte-sur. Encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

19. Considerar los siguientes puntos:

(a) Mostrar que la velocidad angular de un sistema de coordenadas ligado a un cuerpo es independiente del sistema elegido.

(b) Dado un punto O fijo al cuerpo, si $\mathbf{v}_O$ y $\mathbf{\Omega}$ son perpendiculares, mostrar que para cualquier otro punto O', también fijo al cuerpo, $\mathbf{v}_{O'}$ y $\mathbf{\Omega}$ resultan perpendiculares.

(c) Mostrar que si $\mathbf{v}_O$ y $\mathbf{\Omega}$ son perpendiculares, entonces siempre es posible encontrar un punto O' cuya velocidad $\mathbf{v}_{O'}$ sea nula.

(d) Bajo las condiciones del ítem anterior, mostrar que todos los puntos ubicados sobre una recta que pasa por O' y es paralela a $\mathbf{\Omega}$ tienen velocidad nula (este es el famoso eje instantáneo de rotación).

(e) Dado el campo de velocidades para un cuerpo rígido: $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{OP}$. Demostrar que:

$$\mathbf{r}_{OP} = \frac{1}{\Omega^2}\big[\mathbf{v}_P \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{v}_O \times \mathbf{\Omega} + (\mathbf{r}_{OP} \cdot \mathbf{\Omega})\mathbf{\Omega}\big].$$

(f) Mostrar que si $\mathbf{r}_{OP}$ es perpendicular a $\mathbf{\Omega}$, entonces puede despejarse fácilmente el vector $\mathbf{r}_{OP}$.

(g) Calcular la distancia del centro de masa al eje instantáneo de rotación.

(h) ¿Puede el eje instantáneo de rotación estar fuera del cuerpo rígido?

(i) Mostrar que si $\mathbf{v}_O$ y $\mathbf{\Omega}$ no son perpendiculares, entonces puede encontrarse un punto O' fijo al cuerpo tal que $\mathbf{v}_{O'}$ y $\mathbf{\Omega}$ sean paralelos.

(j) Mostrar que si $\mathbf{v}_O$ es paralelo a $\mathbf{\Omega}$, entonces nunca puede encontrarse un un punto O' fijo al cuerpo tal que $\mathbf{v}_{O'}$ sea nulo ni perpendicular a $\mathbf{\Omega}$.

(k) ¿En qué casos la energía cinética puede desacoplarse en un término de rotación más otro de traslación?

(l) ¿Qué relación satisfacen los momentos principales de inercia cuando se tiene un sistema de partículas coplanares?

(m) Mostrar que los momentos principales de inercia satisfacen la siguiente relación: $I_1 + I_2 \geq I_3$.

(n) Mostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría, entonces el centro de masa está contenido en dicho eje y además es un eje principal de inercia.

(o) Mostrar que si un cuerpo tiene un plano de simetría, entonces tanto el centro de masa como dos de los ejes principales de inercia están contenidos en dicho plano, y el tercer eje es perpendicular.

(p) Mostrar que en un sistema colineal de partículas los momentos principales de inercia satisfacen que $I_1 = I_2$ y que $I_3 = 0$, donde el eje x_3 coincide con la línea de las partículas.

(q) Mostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría de orden mayor que 2, hay degeneración en el plano perpendicular al eje.

(r) Mostrar que cuando el tensor de inercia es totalmente degenerado, sus momentos principales de inercia son invariantes frente a cualquier rotación.

(s) Escribir las condiciones de vínculo en cada uno de los siguientes casos: esfera rodando sin deslizar sobre un plano; ídem para una moneda; esfera rodando sin deslizar sobre una esfera que puede rodar libremente; el sistema del problema 5 de la Guía 4.