Mecánica Clásica - Primer cuatrimestre de 2022

Guía 6: *Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas. Hamilton–Jacobi.*

1. Escribir el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton de:

   (a) Un oscilador armónico unidimensional. Graficar el retrato de fase.

   (b) Un péndulo plano de longitud l y masa m en un campo gravitatorio g. Graficar el retrato de fase. Hallar los puntos de equilibrio y clasificarlos según su estabilidad; encontrar la ecuación de la curva separatriz entre la región de libración y la de rotación.

   (c) Una partícula en un potencial central $V(r)$, en coordenadas esféricas (r, θ, φ). Hallar constantes de movimiento.

   (d) Una partícula en un plano y con un potencial central $V(r)$, en coordenadas polares (r, φ). En especial, considerar los potenciales $V(r) = -k/r$ y $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ $(k > 0)$. Graficar los retratos de fase para las variables r y p_r y clasificar las órbitas posibles.

   (e) Un trompo simétrico, fijo por un punto en su eje de simetría, en un campo gravitatorio uniforme, usando los ángulos de Euler. Hallar constantes de movimiento. Graficar el retrato de fase para las variables θ y p_θ. Dada la variedad de movimientos posibles, analice casos particulares sencillos, por ejemplo: $p_\varphi = p_\psi$, $p_\varphi = 0$.

   (f) Un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas cilíndricas y esféricas. Construya los correspondientes diagramas de fases.

   (g) Un péndulo doble, midiendo ambos ángulos desde la vertical.

2. Resuelva numéricamente las ecuaciones de Hamilton para el péndulo doble utilizando las siguientes condiciones iniciales

   i) $q_1 = 10^{-2}$; $q_2 = 10^{-2}$; $p_1 = 0.0$; $p_2 = 0.0$.

   ii) $q_1 = -0.822$; $q_2 = 1.4335$; $p_1 = 1.54217$; $p_2 = 0.0$.

   iii) $q_1 = -0.7$; $q_2 = 1.4$; $p_1 = 1.815625$; $p_2 = 0.0$.

   iv) $q_1 = -0.5$; $q_2 = 1.4$; $p_1 = 2.106011$; $p_2 = 0.0$.

   v) $q_1 = 0.5$; $q_2 = \pi$; $p_1 = 0.0$; $p_2 = 0.0$.

   (a) Para cada caso grafique y_2 en función de x_2 (donde x_2 e y_2 son las coordenadas cartesianas de la segunda masa).

   (b) Para cada trayectoria construya el *mapa de Poincaré* generado cuando las trayectorias cruzan la superficie $p_2 = 0$ con $\dot{p}_2 > 0$, es decir, guarde los instantes los que p_2 pasa de tener valores negativos a positivos. Marque estos puntos en los gráficos del inciso anterior.

3. Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano igual a la energía total?

4. Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V = \frac{1}{r}(1+\dot{r}^2)$, donde r es la distancia al origen. Encuentre los momentos generalizados p_r y p_θ, y el hamiltoniano. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva H? ¿Es $H = E$? Reduzca el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

5. Demostrar que las coordenadas polares en el plano qp de un sistema con un solo grado de libertad no son coordenadas canónicas. Es decir $\rho = \sqrt{q^2+p^2}$ y $\phi = \arctan(p/q)$ no son coordenadas canónicas. Si en lugar de ρ se toma una función $f(\rho)$ como primera coordenada, ¿qué función puede elegirse para que $f(\rho)$ y ϕ sean coordenadas canónicas?

6. (a) Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$ en la dirección $\hat{z}$. Tome $\mathbf{A} = Bx\,\hat{y}$. Recuerde que el potencial generalizado es $V = -(e/c)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$.

   (b) Resuelva de nuevo el problema eligiendo ahora $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}$.

   (c) Demuestre que la siguiente transformación es canónica y úsela para encontrar una solución alternativa:

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2), \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2), \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2),$$

   donde $\omega = eB/mc$.

7. Pruebe que si se hace una transformación canónica de (q,p) a (Q,P) se tiene:

$$\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\right)_{Q,P} = \left(\frac{\partial P_j}{\partial p_i}\right)_{q,p}, \qquad \left(\frac{\partial q_i}{\partial P_j}\right)_{Q,P} = -\left(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\right)_{q,p},$$

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\right)_{Q,P} = -\left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\right)_{q,p}, \qquad \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j}\right)_{Q,P} = \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\right)_{q,p}.$$

8. Muestre que la transformación $Q = \ln(\frac{\sin p}{q})$, $P = q\cot p$ es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q,Q)$ y $F_2(q,P)$. Aplique la transformación al oscilador armónico. Encuentre al menos 4 libros que incluyan este ejercicio. Encuentre al menos un libro en donde esta transformación sea aplicada con algún provecho.

9. Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(p,q) = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2).$$

   Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P,Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton:

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_y\sin\lambda}{m\omega} \qquad p_x = -m\omega Y\sin\lambda + P_x\cos\lambda$$

$$y = Y\cos\lambda + \frac{P_x\sin\lambda}{m\omega} \qquad p_y = -m\omega X\sin\lambda + P_y\cos\lambda.$$

Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y = p_y = 0$ en $t = 0$.

10. Demuestre las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo f, g y h funciones de p_i y q_i; $F(f)$ es una función de f y c es una constante.

$$\begin{cases} [f, c] = 0, \\ [f, f] = 0, \\ [f, F(f)] = 0, \\ [f, g] + [g, f] = 0, \\ [f + g, h] = [f, h] + [g, h]. \end{cases} \qquad \begin{cases} [fg, h] = f[g, h] + [f, h]g, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right], \\ [f, g^n] = ng^{n-1}[f, g], \\ [g, F(f)] = F'(f)[g, f]. \end{cases}$$

11. Mediante la identidad de Jacobi, muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.

12. (a) Para una partícula calcule explícitamente los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ con las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Además calcule $[L_i, L_j]$ y $[L_i, L^2]$.
    (b) Muestre que si dos componentes del momento angular se conservan, entonces se conserva el vector $\mathbf{L}$. Una partícula cae bajo la acción de la gravedad a lo largo de la recta $y = 0, x = a, z = -1/2gt^2$. Muestre que dos componentes del momento angular se conservan y sin embargo no se conserva la tercera.
    (c) ¿Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente momentos canónicos? *Idem* para H y L_z.
    (d) ¿Pueden ser L_x y L_y simultáneamente momentos canónicos? *Idem* para L_x y L^2.
    (e) ¿Se modifica el elemento de volumen en el espacio de las fases en una transformación canónica?

13. Considere los siguientes puntos:
    (a) Demuestre que $\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$. ¿Qué obtiene para $f = q_i$ y $f = p_i$? Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea constante de movimiento es que $[f, H] = 0$.
    (b) Muestre que si una coordenada q_i es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de q_i. Observe que si f es una constante de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al Hamiltoniano. ¿Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?

14. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x en el potencial $V = a \sec^2(x/l)$, donde a y l son constantes positivas y x puede moverse entre $\pm\frac{\pi}{2}l$. Resuelva la ecuación de Hamilton–Jacobi encontrando una expresión integral para S. Encuentre $x(t)$ utilizando S. Repita con $V = V_0 e^{x/x_0}$ y $x \in (-\infty, \infty)$.

15. Considerar el sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1, q_2, $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema? Resuelva esta ecuación para encontrar la función S. Escriba la expresión integral para la función S y las expresiones integrales que dan la órbita y la evolución temporal. ¿De qué sistema se trata?

16. Considere un movimiento unidimensional de una partícula de masa m y carga e sometida a una campo eléctrico uniforme dependiente del tiempo $E(t)$. Encuentre el hamiltoniano del sistema. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi? Muestre que la función S puede escribirse como

$$S = \left(\int_0^t eE(t')dt' \right) x + \alpha x - f(t),$$

donde α es una constante y f es una función del tiempo. Resuelva la ecuación para f. De allí encuentre la posición y el momento canónico conjugado en función del tiempo.

17. Considere un oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω:

    (a) Halle su hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton, construya los diagramas de fases, halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad, discuta la existencia de movimientos de libración y rotación.

    (b) Halle la trasformación canónica de función generatriz $F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q, P) = \omega P$.

    (c) Muestre que (Q, P) son variables de ángulo–acción. Halle el área encerrada por las curvas de energía constante E en el espacio de fases, y muestre que la curva que corresponde a un P dado encierra un área $2\pi P$.

    (d) Halle la función generatriz de tipo $F_2(P, q)$ que genera la misma transformación canónica $(q, p) \to (Q, P)$. ¿Qué relación hay entre F_1 y F_2?

18. Demuestre que la función generatriz de la transformación canónica que lleva a variables de ángulo y acción es $F_2(q, J) = \int^q p(J, q')\, dq'$. Pruebe que esta función *no* es periódica como función de q, pero que $F_1(q, Q)$ *sí* lo es.

19. Considere el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2.$$

Resuelva el problema utilizando la técnica de Hamilton–Jacobi. Encuentre la órbita general de la solución de la ecuación de H–J. ¿Qué sistema físico podría corresponder a este problema? Resuelva este problema de otras tres maneras:

    (a) Resolviendo las ecuaciones canónicas.

    (b) Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente (A y B son constantes), resolviendo para Q_i y P_i y luego antitransformando.

(c) Por medio de variables de ángulo–acción.

20. Una partícula de masa m se mueve en el potencial $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(|x| - \ell)^2$

    (a) Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya diagramas de fases, considerando especialmente las curvas de fases próximas al origen.

    (b) Muestre que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, y en cada una se definen distintas variables de ángulo–acción. Halle la variable de acción en función de E en cada caso.

21. Escriba las variables de acción y ángulo para las rotaciones en un plano de una barra con un punto fijo, sometida a un potencial angular $V(\psi) = k|\psi|/\pi$ si $-\pi < \psi < \pi$ ($k > 0$), con $V(\psi)$ periódico, $V(\psi + 2\pi) = V(\psi)$.