

Mecánica Clásica - Primer cuatrimestre de 2022

Guía 7: Relatividad especial

- Utilizando un diagrama espacio-temporal de Minkowski muestre los efectos de la contracción de Lorentz y de la dilatación temporal. Utilice la invariancia del intervalo para calibrar los ejes en ambos sistemas.
- Un sistema S' se mueve con velocidad V respecto de otro sistema S .
 - Una varilla recta y fija en el sistema S' forma un ángulo θ' respecto de la dirección frontal del movimiento. Encontrar el ángulo θ de la varilla en el sistema S .
 - Una partícula masiva se mueve en el sistema S' con velocidad constante v' y un ángulo θ' respecto de la dirección frontal del movimiento. ¿Cuál es el ángulo θ medido en el sistema S ? Repetir el cálculo considerando que la partícula es un fotón.
- Dos anillos de radio R rotan con velocidades ω iguales y opuestas. Sobre cada anillo se fija un reloj, y ambos relojes se sincronizan en la ocasión del primer encuentro. ¿Cuánto indica cada reloj en el siguiente encuentro?
- En un sistema de referencia inercial S se propaga una onda electromagnética plana en una cierta dirección \mathbf{n} , de manera que la amplitud de la misma puede expresarse como

$$A = A_0 \cos[k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct)].$$

- Muestre que si se observa dicha onda desde un sistema S' , que se mueve con velocidad \mathbf{V} respecto de S , la dirección de propagación será distinta, de valor

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} + (\gamma - 1)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\mathbf{V}/V^2 - \gamma\mathbf{V}/c}{\gamma(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}/c)},$$

efecto conocido como aberración.

- Asimismo, muestre que la frecuencia $\omega = kc$, pasa a ser en el sistema S'

$$\omega' = \gamma(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}/c)\omega,$$

que es el efecto Doppler relativista (difiere del galileano en el factor γ).

- Considere la denominada paradoja de los mellizos.
 - Usando un diagrama espacio-temporal de Minkowski indique las líneas de universo de ambos mellizos y de las señales de radio que se envían uno al otro a intervalos regulares iguales en el sistema propio de cada uno de ellos. Note la diferencia de escalas en el diagrama de los intervalos para cada mellizo y discuta la diferencia entre intervalos de recepción de cada señal e intervalos de emisión.

- (b) Repita el análisis desde el punto de vista galileano, pero considerando que las señales de radio tienen siempre velocidad c independientemente de la velocidad de la fuente emisora.
- (c) Discuta la diferencia del efecto Doppler en los casos relativista y galileano como se manifiesta en los diagramas previos.
6. Escriba las expresiones correspondientes al lagrangiano y al hamiltoniano relativistas en los siguientes casos:
- (a) Una partícula libre de masa m .
- (b) Una partícula de masa m y carga e que se mueve en presencia de un campo electromagnético con potenciales escalar ϕ y vectorial \mathbf{A} .
7. Considere un cohete libre de fuerzas que se impulsa emitiendo gases a velocidad V_G constante, relativa al cohete.
- (a) Usando la conservación del impulso total, pruebe que la ecuación que relaciona la velocidad v del cohete con su masa es

$$m \frac{dv}{dm} = -V_G \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

- (b) Intégrela y determine la velocidad final en función de la fracción de masa final del cohete (respecto de la inicial) y de V_G . Note la conveniencia de obtener el máximo V_G posible.
8. Una partícula de masa m y velocidad v choca con una partícula en reposo de masa M , siendo absorbida por esta última. Encuentre la masa y la velocidad del sistema compuesto resultante.
9. Para un choque elástico de dos partículas de igual masa m , una de las cuales se encuentra en reposo mientras que la otra se mueve a velocidad \mathbf{V} , determine las energías de las partículas resultantes, y el ángulo correspondiente de la otra partícula, en función del ángulo que forma una de ellas con la dirección de \mathbf{V} .
10. El fotón es una partícula de masa nula cuya energía vale $E = h\nu$, con h la constante de Planck. Se tiene que un fotón de longitud de onda λ incide sobre un electrón en reposo, cuya masa es m_e , saliendo con una longitud de onda λ' y un ángulo θ después del choque (scattering de Compton). Muestre que

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

11. Se tiene una partícula en reposo, de masa m , que se desintegra.
- (a) Si el resultado consiste en dos partículas de masas m_1 y m_2 , pruebe que la energía cinética (energía total menos energía en reposo) $T_{1,2}$ de cada una de ellas se expresa en la forma

$$T_{1,2} = \Delta mc^2 \left(1 - \frac{m_{1,2}}{m} - \frac{\Delta m}{2m} \right).$$

donde $\Delta m = m - m_1 - m_2$ es el exceso de masa del proceso.

- (b) Considere ahora que la masa m se transforma en un conjunto de partículas, la suma de cuyas masas es igual a $m - \Delta m$. Usando lo deducido en el inciso anterior, justifique que en el caso general la energía cinética máxima posible de una partícula resultante genérica de masa m_i es

$$T_i^{\max} = \Delta mc^2 \left(1 - \frac{m_i}{m} - \frac{\Delta m}{2m} \right).$$

12. Una partícula de masa m que viaja a velocidad V se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2 .

- (a) Determine la energía de cada una de ellas, y el ángulo correspondiente de la otra partícula, en función del ángulo que forma la trayectoria de una de ellas con la dirección de V .
- (b) Demuestre que conociendo las masas m_1 y m_2 de las partículas resultantes y el ángulo entre sus trayectorias puede determinarse la masa m de la partícula inicial.