Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021

—. —*

■ Un cono homogéneo de masa m y ángulo β puede rodar sin deslizar por el interior de un cono fijo de ángulo $\alpha = 2\beta$. Los vértices de los dos conos permanecen siempre en contacto. Hay gravedad. La posición del centro de masa del primer cono y sus momentos de inercia principales respecto de su vértices pueden considerarse datos.

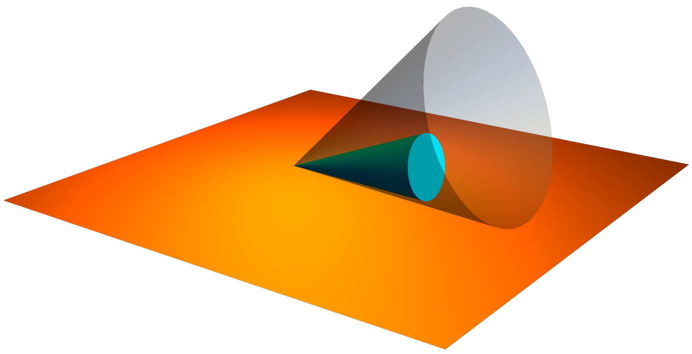
a) Elija un sistema conveniente de ejes fijos al espacio. Este punto es clave.

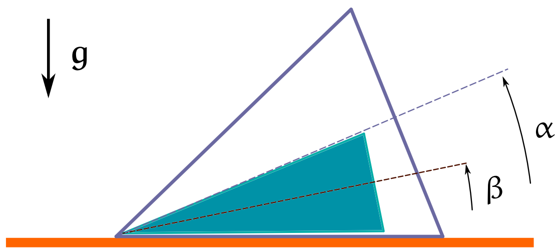
b) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

c) Escriba el lagrangiano del sistema.

d) Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a la configuración de equilibrio estable.

Nota: Los ángulos están elegidos de tal manera que las expresiones que involucran varias funciones trigonométricas se simplifican. La energía potencial en un campo gravitatorio con aceleración $\mathbf{g}$ es $V = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$. Ver animación http://materias.df.uba.ar/mcaa2021c1/files/2021/06/dos_conos_255cp_opt.gif.





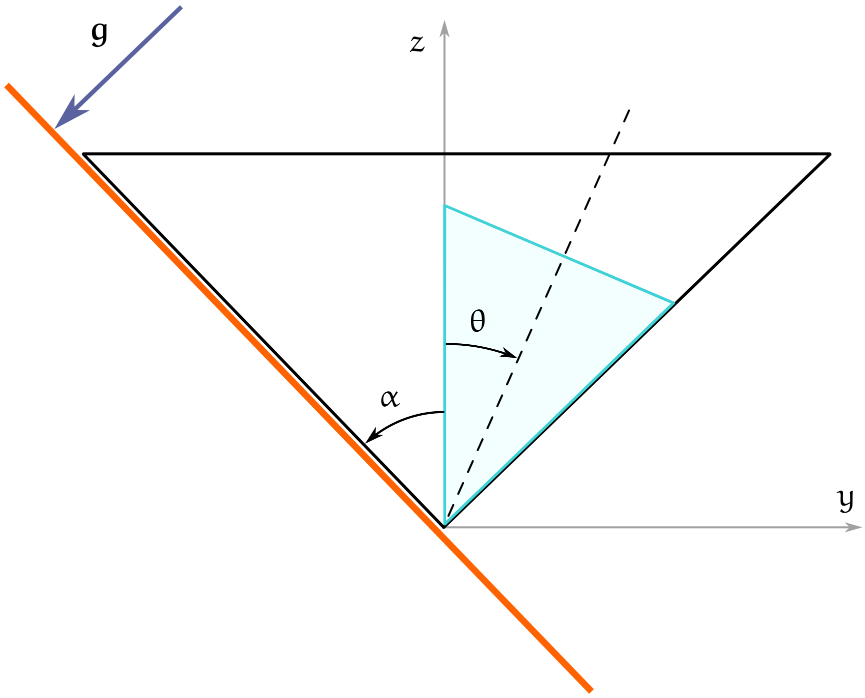
■ **Solución**. Conviene elegir los ejes como muestra la figura de la página siguiente. Así el ángulo de Euler θ del cono es constante:

$$\theta = \alpha - \beta = \beta. \tag{1}$$

Los ángulos ψ y φ estarán vinculados por la condición de rodadura, de modo que hay un solo grado de libertad. Como el sistema tiene simetría cilíndrica, para determinar la relación entre $\dot\psi$ y $\dot\varphi$ elijamos la configuración que muestra la figura. La relación que obtengamos entre $\dot\psi$ y $\dot\varphi$ tendrá que valer para todo tiempo. La velocidad angular es

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\psi\,\hat{e}_3 + \dot\varphi\,\hat{z} = \dot\psi(\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}) + \dot\varphi\,\hat{z} = \dot\psi\sin\theta\,\hat{y} + (\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)\hat{z}. \tag{2}$$

*zanellaj@df.uba.ar



La velocidad angular tiene que estar dirigida según la línea de contacto entre ambos conos. Debe cumplirse lo siguiente

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda(\sin\alpha\,\hat{y} + \cos\alpha\,\hat{z}). \tag{3}$$

En otras palabras, la relación entre sus componentes debe ser

$$\frac{\omega_z}{\omega_y} = \cot\alpha. \tag{4}$$

Usando la ec. (2), resulta

$$\frac{\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi}{\dot\psi\sin\theta} = \cot\alpha. \tag{5}$$

Esto implica

$$\dot\psi = \frac{\dot\varphi}{\sin\theta\ \cot\alpha - \cos\theta}. \tag{6}$$

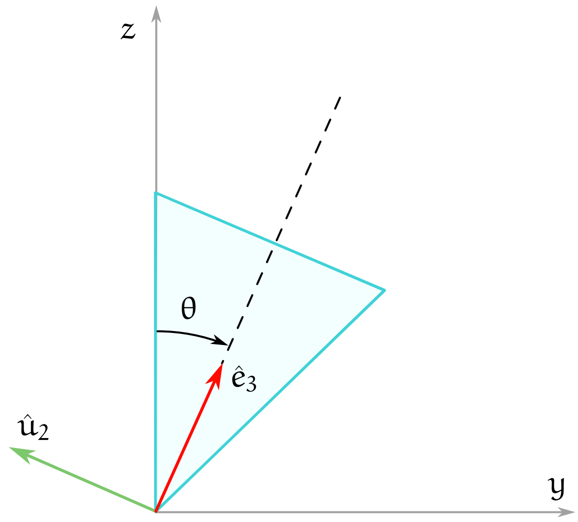
Puesto que $\alpha = 2\theta$, resulta

$$\sin\theta\ \cot\alpha - \cos\theta = \frac{1}{\sin 2\theta}(\sin\theta\ \cos 2\theta - \cos\theta\ \sin 2\theta) = -\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta} = -\frac{1}{2\cos\theta}. \tag{7}$$

Entonces,

$$\dot\psi = -2\dot\varphi\cos\theta. \tag{8}$$

Definamos la dirección $\hat{u}_2$ como muestra la figura siguiente.



El sistema de versores $\hat{\rho}$, $\hat{u}_2$ y $\hat{e}_3$ corresponde a direcciones de ejes principales de inercia. Así, si los momentos de inercia principales respecto al vértice del cono son $I_1 = I_2 = I$ e I_3, la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + \tfrac{1}{2} I \omega_2^2, \tag{9}$$

donde ω_2 es la componente según el versor $\hat{u}_2$. Aquí hemos usado que la componente de $\boldsymbol{\omega}$ en la dirección de $\hat{\rho}$ es nula. Explícitamente, usando el resultado (8),

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = -\dot{\varphi}\cos\theta, \qquad \omega_2 = -\dot{\varphi}\sin\theta. \tag{10}$$

En definitiva,

$$T = \tfrac{1}{2}\left(I_3\cos^2\theta + I\sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 \equiv \tfrac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\varphi}^2. \tag{11}$$

Por otro lado, con la elección de ejes fijos al espacio que hemos hecho, la aceleración de la gravedad es

$$\mathbf{g} = -g(\cos\alpha\,\hat{y} + \sin\alpha\,\hat{z}). \tag{12}$$

La energía potencial es

$$V = -m\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}, \tag{13}$$

donde $\mathbf{r}$ es la posición del centro de masa del cono,

$$\mathbf{r} = d\,\hat{e}_3. \tag{14}$$

Aquí d es la distancia del vértice al centro de masa. Puesto que

$$\hat{e}_3 = -\sin\theta\,\hat{\varphi} + \cos\theta\,\hat{z}, \tag{15}$$

resulta

$$V = mgd(-\cos\alpha\,\sin\theta\,\cos\varphi + \sin\alpha\,\cos\theta). \tag{16}$$

El último término es constante, así que podemos omitirlo. Finalmente, el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \tfrac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\varphi}^2 + mgd\sin\theta\,\cos 2\theta\,\cos\varphi. \tag{17}$$

En esta expresión hemos usado que $\alpha = 2\theta$. La posición de equilibrio estable corresponde a $\varphi = 0$. El lagrangiano de pequeñas oscilaciones es

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\varphi}^2 - \tfrac{1}{2}mgd\sin\theta\,\cos 2\theta\,\varphi^2. \tag{18}$$

Por lo tanto, la frecuencia de pequeñas oscilaciones es

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgd\sin\theta\,\cos 2\theta}{\mathcal{I}}}. \tag{19}$$