Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2022. Turno A (Ferraro).

Guía 0: *Ecuaciones de Newton. Fuerzas de vínculo. Leyes de conservación. Coordenadas curvilíneas.*

1. Una partícula está sometida a una fuerza $F(x) = -kx + a/x^3$, con k y a mayores que cero.

   (a) Hallá el potencial $U(x)$ y discutí qué tipos de movimiento son posibles. Indicá las posiciones de equilibrio y estudiá su estabilidad. Encontrá la solución general $x(t)$. *Ayuda: separá variables en la conservación de la energía y usá la sustitución $u = x^2$ para la integral en x.*

   (b) Interpretá el movimiento en el límite $E^2 \gg ka$. ¿Cuánto vale el período de las oscilaciones?

   (c) Interpretá el movimiento en el límite $E^2 \longrightarrow ka$ cuando $E^2 > ka$. ¿Cuánto vale el período de las oscilaciones en este caso?

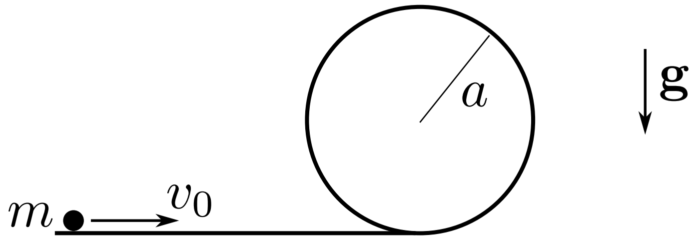
2. Para evitar que Don Vittorio DiMaggio los mate, Homero y Krusty deben subirse a su mini bicicleta y completar una vuelta a un bucle circular de radio a. Para ello, inciden horizontalmente sobre el mismo con una velocidad de módulo v_0. La masa total de Homero, Krusty y el pequeño vehículo es m.

   (a) Calculá la normal que el bucle ejerce sobre la bicicleta en función de su posición y de datos.

   (b) ¿Para qué valores de v_0 Homero y Krusty logran dar la vuelta al bucle y así evitar que la mafia los ajusticie? ¿Qué velocidad tendrán en el punto más alto del bucle en esos casos?

   (c) ¿Para qué valores de v_0 la bicicleta se desprenderá del bucle? ¿Dónde se desprende?

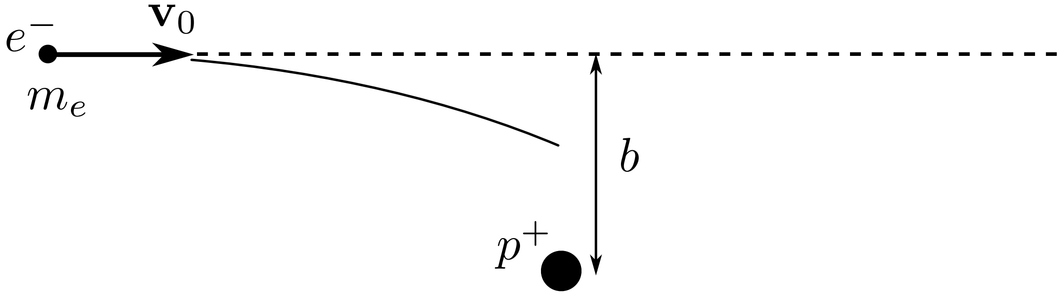
   (d) ¿Para qué valores de v_0 no sucederá ninguna de las anteriores? ¿Hasta dónde llegan?



3. Considerá un protón en reposo en algún sistema de referencia fijo. Desde muy lejos incide un electrón con velocidad v_0, y cuyo movimiento, inicialmente, es rectilíneo y uniforme. Definimos el parámetro de impacto b como la mínima distancia de acercamiento entre el protón y el electrón si éste no se desviara y aquél permaneciera en reposo. Al acercarse al protón, la trayectoria se curva debido a la interacción electromagnética entre ambos. Como la masa del protón es mucho mayor que la del electrón, podemos suponer que el protón está fijo y que el electrón se mueve en el potencial electrostático $U(r) = e^2/r$.

   (a) ¿Qué magnitudes se conservan?

   (b) Calculá la distancia de mínimo acercamiento entre las partículas.



4. Dos partículas aisladas interactúan entre sí.

   (a) Expresá matemáticamente la versión **fuerte** de la tercera ley de Newton (es decir, el hecho de que las fuerzas de interacción entre ambas partículas están alineadas con el segmento que las une).

       Nota: la versión más general (es decir, la versión débil) de la tercera ley del bueno de Isaac establece que las fuerzas de interacción entre dos partículas son iguales en módulo y opuestas en sentido, pero nada dice sobre la dirección en la que actúan. ¿Conocés alguna interacción que no cumpla la versión fuerte de esta ley? ¿Cuál?

   (b) Mostrá que si la interacción entre las partículas satisface la versión fuerte de la tercera ley, entonces se conserva el momento angular **de cada partícula** respecto del centro de masa.

   (c) Probá que el impulso angular total del sistema (es decir, la suma de los impulsos angulares de ambas partículas), medido con respecto **a cualquier sistema inercial**, se conserva si y solo si la interacción entre las partículas satisface la versión fuerte de la tercera ley.

   (d) Mostrá que si se conserva el impulso angular del sistema, las órbitas de ambas partículas respecto del centro de masa estarán contenidas en un mismo plano.

5. Para un sistema (no necesariamente aislado) con un número arbitrario de partículas:

   (a) Mostrá que el momento angular total respecto de un origen arbitrario puede descomponerse según:

   $$\mathbf{L}_{\mathrm{O}} = \mathbf{L}_{\mathrm{O}}^{(\mathrm{CM})} + \mathbf{L}_{\mathrm{CM}} \,,$$

   donde $\mathbf{L}_{\mathrm{O}}^{(\mathrm{CM})} \equiv \mathbf{r}_{\mathrm{CM}} \times \mathbf{p}_{\mathrm{CM}}$ es el momento angular del centro de masa respecto del origen O (*momento angular orbital*) y $\mathbf{L}_{\mathrm{CM}}$ es el momento angular del sistema respecto de su centro de masa (*momento angular intrínseco o de espín*).

   (b) Si el centro de masa del sistema está acelerado, ¿es válida la relación $d\mathbf{L}_{\mathrm{CM}}/dt = \mathbf{N}_{\mathrm{CM}}$? Aquí, $\mathbf{N}_{\mathrm{CM}}$ es la sumatoria de torques sobre sistema respecto del centro de masa. Si es válida, ¿es necesario considerar la contribución de los torques de las fuerzas internas? ¿de qué depende?

6. Hallá el vector velocidad y el vector aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas. Dentro de lo posible, interpretá geométricamente cada término. Escribí el momento lineal de una partícula en estos sistemas. ¿Es cierto que $F_r = 0$ implica $p_r = cte$? ¿Y la recíproca? Justificá y da ejemplos.

7. Utilizando las expresiones obtenidas en el problema anterior, escribí las ecuaciones de movimiento para un péndulo plano y para uno esférico, respectivamente.

8. Una bolita de masa m se mueve sin fricción en el interior de un tubo cilíndrico muy delgado. El tubo rota con velocidad angular constante ω sobre una mesa horizontal y a $t = 0$ está alineado con el eje x.

   (a) ¿Qué magnitudes de conservan para la bolita?

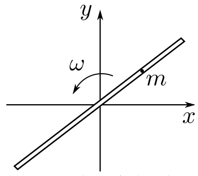
   (b) En un **sistema de referencia** fijo al origen, escribí las ecuaciones de vínculo para la bolita. Hacelo primero usando **coordenadas** cartesianas y luego **coordenadas** polares.

   (c) Escribí las ecuaciones de Newton para la bolita en ambos sistemas de coordenadas. Obtené la ecuación de movimiento en ambos casos. ¿En cuál fue más fácil? ¿Por qué?

   (d) En un sistema de referencia que gira solidario al tubo (es decir, un sistema no inercial), hallá las fuerzas ficticias que siente la partícula y escribí las ecuaciones de Newton **utilizando coordenadas cartesianas** con uno de los ejes alineado con el tubo. ¿A cuál de los dos enfoques anteriores se parece más? ¿Por qué?

(e) La/s fuerza/s ficticias que aparecen en el sistema de referencia anterior, ¿pueden derivarse de un potencial? ¿Podés escribir alguna ley de conservación en este caso?

(f) Hallá la fuerza de vínculo **en función del tiempo** si a $t = 0$ la bolita está quieta con respecto al tubo y a una distancia a del origen. Resolvé usando el enfoque que consideres más cómodo.



9. Un disco de masa M y radio R gira con velocidad angular constante ω. Una mosca de masa m, inicialmente en el centro del disco, camina hacia el borde con velocidad radial de módulo v_0.

   (a) El disco gira con velocidad angular constante gracias a un motor. ¿Qué torque debe hacer este para compensar el movimiento de la mosca? ¿Cuál es la fuerza de Coriolis que siente la mosca?

   (b) Si el motor no funcionara, ¿cuál será la velocidad angular del disco cuando la mosca esté a una distancia d del centro?

10. Un disco homogéneo de masa m y radio r rueda sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo α respecto de la horizontal.

   (a) Hallá su aceleración angular y la aceleración lineal de su centro.

   (b) Si en $t = 0$ el centro del disco estaba en reposo a una altura h respecto del suelo, ¿cuáles son su velocidad angular y lineal al llegar a éste? ¿Qué es lo que define la llegada del disco al suelo?

   (c) ¿Qué magnitudes se conservan en el movimiento del disco antes de tocar el suelo?

11. Un cuerpo homogéneo de masa m y radio R_1 rueda sin deslizar sobre una rampa semiesférica de radio R_2. El momento de inercia del cuerpo, respecto de su centro de masa, es $I_{\mathrm{CM}} = \alpha m R_1^2$ donde m es la masa del cuerpo y α es un factor adimensional **puramente geométrico** ($\alpha = 1/2$ para un cilindro, $\alpha = 2/5$ para una esfera, $\alpha = 1$ para un anillo, etc.).

   (a) Escribí, en términos de derivadas del ángulo θ, los vectores $\vec{v}_{\mathrm{CM}}$ (velocidad del centro de masa), $\vec{a}_{\mathrm{CM}}$ (aceleración del centro de masa) y $\vec{\Omega}$ (frecuencia de rotación intrínseca) del cuerpo.

   (b) Explicá por qué se conserva la energía mecánica del cuerpo y escribila en términos del ángulo θ y sus derivadas. Notá que los dos términos de la energía cinética (el de traslación del centro de masa y el de rotación en torno al mismo) son proporcionales. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

   (c) A partir de la expresión de la energía, obtené la ecuación de movimiento para el centro de masa del cuerpo y comparala con la que tendría un cuerpo puntual también conservativo que respeta el mismo vínculo (es decir, un péndulo). Si el cuerpo rígido del problema original fuera muy pequeño (es decir, si $R_1 \ll R_2$), ¿no deberían coincidir las dos ecuaciones? ¿Qué está pasando?