Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2022. Turno A (Ferraro).

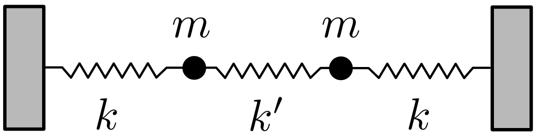
Guía 1: *Formulación lagrangiana.*

1. En el sistema de la figura las partículas sólo se mueven horizontalmente y definimos x_1 y x_2 como las posiciones de las mismas respecto de sus puntos de equilibrio. Sean $q_1 = x_1 + x_2$ y $q_2 = x_1 - x_2$.

   (a) ¿Son q_1 y q_2 un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?

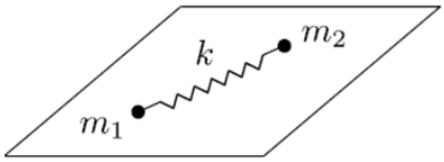
   (b) Si $q_1 = 0$, describí cualitativamente el movimiento de cada partícula. Ídem si $q_2 = 0$.

   (c) Calculá las fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2.

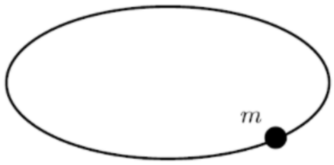


2. Para cada uno de los siguientes casos, indicá cuántos grados de libertad tiene el sistema y proponé conjuntos adecuados de coordenadas generalizadas.

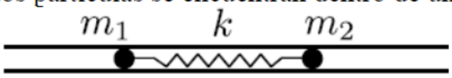
a) Las partículas se mueven sobre una mesa sin fricción.



d) Una partícula enhebrada en un alambre elíptico.

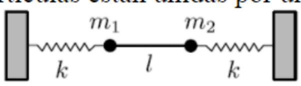


b) Las dos partículas se encuentran dentro de un tubo.



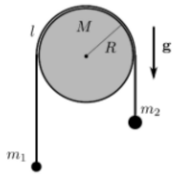
Las posiciones respecto del centro de masa, ¿son coordenadas generalizadas adecuadas?

e) Las dos partículas están unidas por una barra rígida.



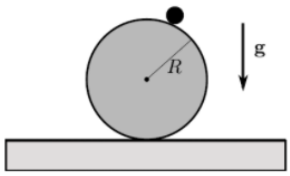
Analizá los casos i) las masas se mueven horizontalmente; ii) las masas se mueven en el plano.

c) Una máquina de Atwood.



Analizá los casos i) la cuerda desliza; ii) la cuerda no desliza.

f) Una partícula que desliza sobre un cilindro.



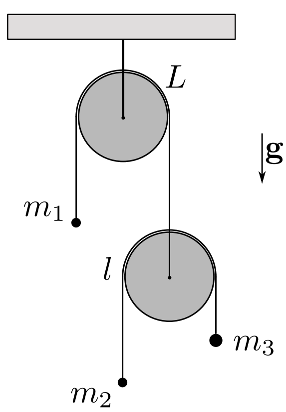
Analizá los casos i) el cilindro está fijo; ii) el cilindro rueda sin deslizar; iii) el cilindro rueda y se desliza.

3. Para el sistema de la figura (teniendo en cuenta que tanto las sogas como las poleas son ideales) hallá la aceleración de cada masa. Resolvé usando cada uno de los siguientes caminos:

   (a) Las ecuaciones de Newton y condiciones cinemáticas.

   (b) El principio de los trabajos virtuales.

   (c) Las ecuaciones de Lagrange.



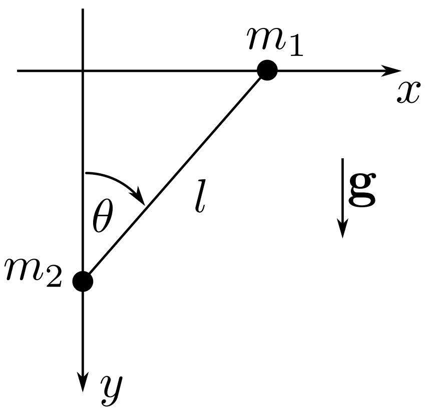
4. Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo inextensible de longitud l. Una de las partículas se mueve sobre un riel paralelo al eje x, mientras que la otra lo hace por un riel paralelo al eje y. El sistema está inicialmente en reposo y dispuesto como se ve en la figura. No hay rozamiento.

   (a) Hallá la ecuación de movimiento para θ utilizando el principio de los trabajos virtuales.

   (b) Volvé a obtener la ecuación de movimiento para θ, pero ahora a partir del lagrangiano.

   (c) Obtené el período de pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio estable del problema.

   (d) Hallá la tensión en el hilo como función de θ para el caso en que las masas son iguales.

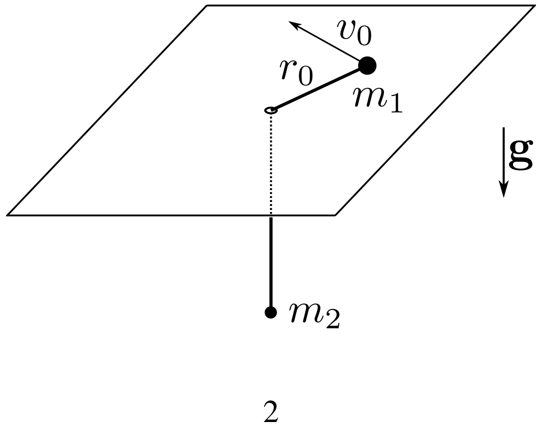


5. Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo de longitud L, como indica la figura. La masa m_1 se mueve en el plano de la mesa y m_2 lo hace sólo verticalmente. En $t = 0$, m_1 se encuentra a una distancia $r_0 < L$ del orificio y se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.

   (a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Elegí un conjunto adecuado de coordenadas generalizadas y escribí las ecuaciones de Lagrange para cada una de ellas. Hallá sus integrales primeras en función de las condiciones iniciales.

   (b) Hallá la tensión del hilo como función de la distancia de una de las partículas al orificio. Resolvé por dos caminos: (i) escribiendo la ecuación de Newton y aprovechando una de las integrales primeras obtenidas en el inciso interior. (ii) a partir del método de los multiplicadores de lagrange.

   (c) Escribí el lagrangiano del sistema pero ahora para el caso en el cual la masa colgante es libre de moverse en un plano vertical. *Notar que si las condiciones iniciales son las mismas que las que usaste para resolver (a) y (b), la evolución del sistema no se vería alterada en este caso.*



6. Dado un sistema con n grados de libertad, se define la *función de energía* según:

$$h \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \,.$$

   (a) Mostrá que $\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ (*¡ojo con la diferencia entre derivada total y parcial!*). De yapa, notá que si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, h es una constante de movimiento.

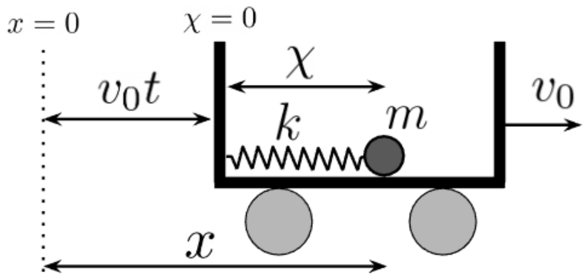
   (b) Teniendo en cuenta que la posición de las partículas es función de las coordenadas generalizadas y del tiempo; mostrá que la energía cinética siempre puede descomponerse según $T = T_2 + T_1 + T_0$, donde T_2 son términos cuadráticos en las velocidades generalizadas; T_1 son términos lineales en las velocidades generalizadas; y T_0 son términos independientes de las velocidades generalizadas.

   (c) Considerando lo anterior y el hecho de que todos los potenciales que conocemos pueden separarse según $V = V_0 + V_1$ (donde V_0 son términos independientes de las velocidades generalizadas y V_1 son términos lineales en las velocidades generalizadas); mostrá que $h = T_2 - T_0 + V_0$.

   (d) Falta poco, no te angusties. Mostrá ahora que si la transformación de coordenadas (es decir, el conjunto de funciones que dan las posiciones de las partículas en términos de las $\{q_i\}$ y el tiempo) no depende explícitamente del tiempo, entonces $T_0 = T_1 = 0$ (es decir, $T = T_2$).

   (e) A partir de lo obtenido en (b), (c) y (d); concluí que si el potencial no depende de las velocidades y la transformación de coordenadas no depende explícitamente del tiempo, entonces $h = E$ (es decir, la función energía coincide con la energía mecánica que conocemos desde pequeñxs).

7. Una partícula de masa m se encuentra unida a un resorte de constante elástica k y longitud natural nula. El otro extremo del resorte está unido a la parte trasera de un carrito que se desplaza con velocidad constante de módulo v_0. Un observador fijo a la línea punteada describe el problema por dos caminos alternativos: en términos de la coordenada x y en términos de la coordenada χ (ver figura). Notar que se ha elegido $t = 0$ de manera que en ese instante la parte trasera del carrito coincida con el observador.



   (a) Usando argumentos elementales, indicá si la energía mecánica de la partícula, según este observador, es o no una constante de movimiento.

   (b) Usando x como coordenada generalizada, escribí el lagrangiano del sistema. ¿Es h igual a E? ¿Se conserva? Hallá la ecuación de movimiento y obtené la solución general.

   (c) Repetí el inciso anterior pero ahora usando a χ como coordenada generalizada. La ley de conservación que obtuviste acá, ¿podrías haberla obtenido por otros medios en el inciso anterior?

   (d) Suponé ahora que otra observadora, también inercial, describe el problema sentada en el carrito y usando a χ como coordenada generalizada. Mostrá que en este caso E no sólo es igual a h sino que, además, resulta ser una constante del movimiento. ¿Cómo compatibilizás esto con lo de los incisos anteriores? ¿Qué está pasando acá?

8. Una partícula está engarzada a un riel que gira con velocidad angular constante como se ve en la figura.

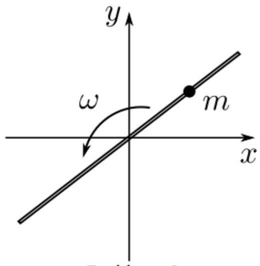
   (a) Elegí un sistema de coordenada(s) generalizada(s) y escribí explícitamente los vectores posición y velocidad (cartesianos) de la partícula en función de tu(s) coordenada(s). Obtené el lagrangiano.

   (b) Mostrá que la fuerza de vínculo ejercida por el riel hace **trabajo virtual** nulo.

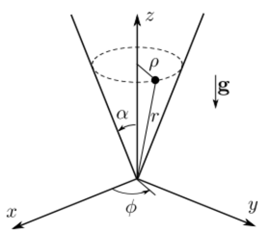
   (c) Mostrá, por otro lado, que el **trabajo real** ejercido por la fuerza de vínculo es no nulo. ¿Se conserva la energía mecánica del sistema? ¿Y la función de energía? ¿Coinciden en este problema? Compará con lo discutido en el inciso (e) del problema 8 de la guía de repaso.

   (d) Hallá la ecuación de movimiento. Obtené la solución de dicha ecuación suponiendo que la partícula está inicialmente en reposo respecto del tubo y a una distancia d del eje de giro.

   (e) Considerá ahora que hay un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g} = -g\hat{e}_y$. Volvé a escribir el lagrangiano y discutir conservaciones.



Problema 8



Problema 9

9. Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre una supeficie cónica definida por $\theta = \alpha$, donde θ es el ángulo polar de las coordenadas esféricas.

   (a) Escribí las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo ϕ y el radio r de las coordenadas esféricas habituales.

   (b) Hallá el potencial efectivo y mostrá que las órbitas circulares son posibles. Obtené la relación entre la velocidad de la partícula y el radio de dichas órbitas. Interpretá el resultado.

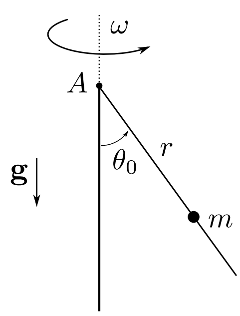
   (c) Calculá los puntos de retorno (máximo y mínimo alejamiento de la partícula al origen) para el caso en que $\alpha = 30°$ y las condiciones iniciales son $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\phi}^2(0) = 4\sqrt{3}g/a$.

   (d) Obtené el período de pequeñas oscilaciones radiales en torno a una órbita circular dada. Comparalo con el período de revolución y describí cualitativamente la órbita de la partícula.

10. Una partícula de masa m se desliza sin fricción por un alambre que está fijo a un punto A, formando un ángulo θ_0 con el eje vertical. El alambre rota alrededor del eje con velocidad angular constante ω.

    (a) Escribí el lagrangiano y obtené la ecuación de movimiento. ¿Hay alguna cantidad conservada?

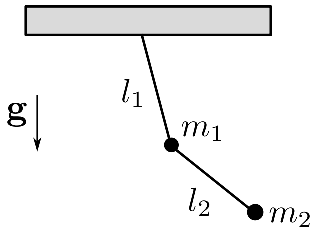
    (b) Resolvé la ecuación de movimiento sabiendo que inicialmente la partícula se encuentra, en reposo, a una distancia d del punto A. Compará este resultado con el obtenido en el problema 8 (d).



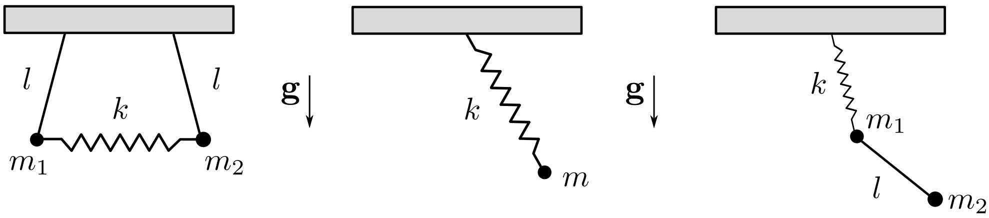
11. Considerá el péndulo doble (y plano) de la figura.

    (a) Obtené el lagrangiano del sistema y las ecuaciones de movimiento.

    (b) En el caso particular de masas iguales y sogas de igual longitud; hallá una expresión aproximada de las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable. Proponiendo una solución de tipo armónico para ambos grados de libertad, resolvé las ecuaciones anteriores supiniendo que en $t = 0$ el sistema se encuentra en dicha posición de equilibrio y a la partícula de abajo se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.



12. Para cada uno de los sistemas de la figura: indicá el número de grados de libertad, elegí un sistema adecuado de coordenadas generalizadas y escribí el lagrangiano. Obtené las ecuaciones de movimiento.



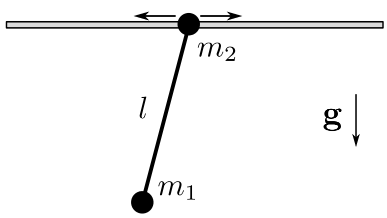
13. Escribí el lagrangiano de un péndulo plano cuyo punto de suspensión:

    (a) se desplaza uniformemente por un círculo vertical de radio a con frecuencia ω,

    (b) efectúa oscilaciones verticales de la forma $a \cos \omega t$,

    (c) efectúa oscilaciones horizontales de la forma $a \cos \omega t$.

14. Encontrá el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: un péndulo simple de masa m_1, con una masa m_2 en el punto sostén, la cual puede moverse sobre una línea horizontal contenida en el plano de movimiento de m_1. En el régimen de pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio estable, resolvé las ecuaciones de movimiento y hallá la frecuencia de oscilación del sistema.



15. Considerá un oscilador isótropo bidimensional, es decir, una partícula de masa m que se mueve en un plano sometida al potencial $V(x, y) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$

    (a) Escribí el lagrangiano del sistema y hallá las ecuaciones de movimiento, usando como coordenadas generalizadas a las coordenadas cartesianas del oscilador: $q_1 = x$ y $q_2 = y$.

    (b) Tomá ahora las coordenadas complejas $q_\pm \equiv x \pm iy$. Explicá por qué son un par admisible de coordenadas generalizadas y escribí el lagrangiano del oscilador en términos de ellas. Volvé a obtener las ecuaciones de movimiento y compará con las obtenidas en el inciso anterior.

16. Mostrá que las ecuaciones de movimiento quedan intactas si al lagrangiano se le suma la derivada total respecto del tiempo de una función arbitraria de las coordenadas y el tiempo.

17. Una partícula de masa m y carga q está en un campo electromagnético con potenciales φ y $\mathbf{A}$ (recordá que $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$). A partir del lagrangiano $L = T - U$, donde $U \equiv q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$ es un potencial generalizado dependiente de la velocidad; mostrá que la fuerza aplicada sobre la partícula es la fuerza de Lorentz, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

18. Una partícula de masa m y carga q está en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$.

    (a) Si $\mathbf{A} = B_0 x\,\hat{y}$, verificá que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Hallá las ecuaciones de movimiento y mostrá que las órbitas son, en general, hélices. ¿Siempre son estrictamente hélices? ¿De qué depende?

    (b) Repetí el punto anterior, pero ahora para el potencial vector $\mathbf{A}' = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$.

    (c) Calculá la función ψ que da el cambio de gauge $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$.

19. Considerá el lagrangiano de una partícula libre $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2$, donde $\mathbf{r}$ es el vector posición de la partícula según un sistema inercial $\mathcal{S}$. El origen de otro sistema $\mathcal{S}'$ se mueve con velocidad $\mathbf{V}(t)$ respecto de $\mathcal{S}$.

    (a) Mostrá que, usando como coordenadas generalizadas las de un sistema de ejes cartesianos que se encuentran fijos a $\mathcal{S}'$, el lagrangiano de la partícula anterior se escribe:

    $$\mathcal{L}(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = \frac{m}{2}|\mathbf{V}(t)|^2 + m\mathbf{V}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}' + \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}'|^2.$$

    Notá que tu sistema de referencia sigue siendo $\mathcal{S}$, lo que cambiaste son las coordenadas. ¿Por qué no es válido, en general, usar a $\mathcal{S}'$ como **sistema de referencia** para escribir el lagrangiano?

    (b) Obtené las ecuaciones de movimiento asociadas al lagrangiano anterior. Interpretá.

    (c) Notá que el primer término del lagrangiano que obtuviste en (a) es una función únicamente del tiempo mientras que el segundo puede escribirse como $m\mathbf{V}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}' = m\frac{d}{dt}\left(\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{r}'\right) - m\frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{r}'$.

    (d) Teniendo en cuenta el inciso anterior y el resultado del problema 16, concluí que el lagrangiano

    $$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}'|^2 - m\frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{r}'$$

    da lugar a las mismas ecuaciones de movimiento que el lagrangiano obtenido en (a). Interpretá los dos términos que aparecen en este lagrangiano modificado.

20. Considerá nuevamente la situación del problema anterior, pero ahora $\mathcal{S}'$ comparte origen con $\mathcal{S}$ y rota con velocidad angular $\mathbf{\Omega}(t)$ con respecto a este. Escribí el lagrangiano de la partícula libre en términos de las coordenadas en $\mathcal{S}'$. Obtené las ecuaciones de movimiento e interpretalas (para esto último, tal vez te convenga escribirlas en forma vectorial). Compará con lo que hiciste en los problemas 8 y 10.

*Nota: observá que los dos fenómenos descritos en los problemas 19 y 20 son acumulativos, en el sentido de que si $\mathcal{S}'$ rota y, al mismo tiempo, su origen se desplaza aceleradamente respecto del de $\mathcal{S}$; la energía cinética de la partícula libre se ve modificada por la suma de los términos obtenidos en cada problema. Más aún, si no se tratara de una partícula libre y estuviera sometida a un potencial arbitrario **independiente de la velocidad**, este cambio de sistema de coordenadas sólo altera la expresión de la energía cinética. Por lo tanto, lo aprendido en estos dos problemas permite obtener el lagrangiano de una partícula en cualquier campo conservativo usando como coordenadas generalizadas las de un sistema no inercial cualquiera.*