Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2022. Turno A (Ferraro).

Guía 2: *Principios variacionales y simetrías.*

Principios variacionales

1. Imaginate que sabés, de manera empírica, que una partícula cae (cerca de la superficie terrestre) una determinada distancia h en un tiempo $t_c = \sqrt{2h/g}$, pero no conocés el tiempo de caída para otras alturas distintas a h. Suponé que también conocés el lagrangiano del problema pero, en lugar de resolver la ecuación de movimiento, probás una forma funcional $y(t) = at^2 + bt + c$. Si las constantes a, b, y c se eligen de manera que la propuesta ajuste la observación empírica mencionada antes, mostrá que la integral $I = \int \mathcal{L}\, dt$ resulta un extremo para valores reales de los coeficientes sólo cuando $a = -g/2$, $b = 0$ y $c = h$. *Nota: estamos tomando $y = 0$ en el suelo, con el eje y apuntando hacia arriba.*

2. Una partícula está sometida a un potencial del tipo gravitatorio $V(r) = -k/r$. Suponiendo que las órbitas son circulares, encontrá la relación entre el período τ y el radio de las órbita a utilizando el principio variacional de Hamilton. *Ayuda: considerá la familia de órbitas elípticas centradas en el origen, dadas por $x(t) = a\cos\omega t$, $y(t) = b\sin\omega t$ con $\omega = 2\pi/\tau$ (¿son físicamente plausibles? ¿importa?); y tomá pequeños apartamientos respecto de la órbita circular haciendo $b = a + \delta a$.*

3. Cuando se arroja un objeto hacia arriba desde la superficie terrestre y con velocidad inicial v_0, el tiempo que pasa hasta que vuelve a tocar el suelo es $t_c = 2v_0/g$. A partir de una función de prueba dada por
$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big],$$
con $\omega = 2\pi/t_c$, encontrá la mejor aproximación a la trayectoria con el criterio del principio de Hamilton. Compará la solución obtenida con la correspondiente al resultado exacto $y(t) = v_0 t - gt^2/2$, prestando especial atención al valor de la velocidad en los extremos. ¿Qué concluís? ¿Cómo modificarías la función de prueba para mejorar este aspecto de la aproximación? *Ayuda: tené a mano las relaciones de ortogonalidad para integrales de productos de funciones trigonométricas.*

4. Una partícula de masa m se mueve en un potencial anarmónico $V(x) = kx^2/2 + \beta x^4/4$. En principio, no conocemos la solución de la ecuación de movimiento pero, por la forma del potencial, sabemos que el movimiento es periódico y pasa por $x = 0$ cada medio período. Es decir, $x(0) = 0$ y $x(\tau/2) = 0$, con $\tau = 2\pi/\omega$. Proponemos, entonces, una familia de soluciones de la forma:
$$x(t) = a + c\,t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$
   (a) Si la amplitud es pequeña, el potencial es similar al armónico y es sensato considerar $b_n = 0$ $\forall n \neq 1$. Usá el principio de Hamilton para obtener los tres parámetros restantes y hallá $\tau(b_1)$.
   (b) La solución exacta (que podés hallar ayudándote con algún programa) es:
$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{1}{\sqrt{1+z/2}}\,K\left(-1 + \frac{2}{2+z}\right),$$
   donde K es la denominada integral elíptica completa del primer tipo, $z = A^2\beta/k$ y A es la amplitud del movimiento. De acá podemos definir un factor de corrección anármonico $f(z)$ como $\tau = \tau_0 f(z)$, donde $\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$ es el período del oscilador armonico sin el término anármonico. Compará los factores de corrección obtenidos por el procedimiento aproximado y del resultado exacto. Pensá que usaste sólo el primer término de la serie. ¿Qué opinás de la comparación?

5. Una partícula de masa m está sometida a un potencial armónico $V(x) = kx^2/2$. Encontrá la ecuación de movimiento minimizando la acción de la siguiente manera:

   (a) Dividí el intervalo de integración, $[t_i, t_f]$, en n partes iguales de tamaño $\Delta t \equiv \frac{t_f - t_i}{n}$.

   (b) Discretizá la coordenada x según $x_\ell \equiv x\,(\ell \Delta t)$ (con $\ell = 0, \ldots, n$) y hacé lo propio con las derivadas: $\dot{x}_\ell \equiv \frac{x_{\ell+1} - x_\ell}{\Delta t}$ (con $\ell = 0, \ldots, n-1$). Reemplazá la integral por una sumatoria.

   (c) Imponé la condición de extremo $\partial S / \partial x_\ell = 0\ \forall \ell$. Tomá el límite $n \longrightarrow \infty$ e interpretá el resultado.

   Para pensar: ¿por qué en este problema obtuvimos la ecuación de movimiento mientras que en los anteriores obtuvimos las soluciones $\mathbf{r}(t)$ *-es decir, las soluciones a las ecuaciones de movimiento-?*

6. Hallá la curva de longitud mínima que une dos puntos dados sobre la superficie de un cilindro.

7. Según el principio de Fermat, cuando la luz se mueve en dos dimensiones sigue la trayectoria que extremiza el tiempo empleado en recorrerla, el cual puede escribirse como

$$\mathcal{T} = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{c} \int_1^2 n(x,y)\, ds,$$

   donde $n = c/v$ es el índice de refracción del medio que la luz atraviesa. Raúl maneja un rastrojero por la Ruta 12 camino a Crespo, Entre Ríos. Es un viernes calurosísimo de Febrero y el índice de refracción del aire puede aproximarse según $n(x,y) = n_0(1 + y/h)$, donde y es la altura sobre el piso, mientras que $n_0 \simeq 1$ y $h \simeq 10\,\mathrm{m}$ son constantes. Mostrá que la trayectoria de la luz está dada por $y(x) = -h + (\alpha h/n_0)\cosh(n_0 x/\alpha h)$, donde α es una constante de integración. Imaginá un rayo de luz proveniente del cielo desde $x < 0$ que alcanza los bellos ojos de Raúl cuando estos están en $(x_R, y_R) = (0\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$. ¿Desde dónde cree ver él que viene ese rayo de luz?

Simetrías

8. Hallá qué magnitudes, además de la energía mecánica, se conservan para una partícula sometida a los siguientes campos gravitatorios/electrostáticos (¿importa cuál de los dos es?). En cada caso, indicá claramente dónde estás ubicando el sistema de referencia y qué coordenadas generalizadas utilizás. *Nota: considerá que todos los cuerpos mencionados son homogéneos.*

   (a) El producido por una esfera.

   (b) El producido por un cilindro infinito. ¿Cómo serían las órbitas de los planetas si el Sol fuera esto?

   (c) El producido por un plano infinito.

   (d) El producido por una hélice circular infinita.

   (e) El producido por una red unidimensional de puntos separados uno del otro una distancia d.

   (f) El producido por un toro circular.

9. Escribí, usando coordenadas esféricas, el lagrangiano de una partícula sometida a un potencial con simetría esférica. ¿Son ambos ángulos cíclicos? ¿No deberían serlo si se conserva el momento angular como vector? ¿Por qué el lagrangiano tiene rota una simetría que está presente en el problema físico?

10. Dos partículas interactúan mediante un potencial $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Demostrá que el impulso angular se conserva si y solo si $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$, es decir, si el potencial depende únicamenente de la distancia entre las partículas. Relacioná esto con lo discutido en el problema 4 de la guía de repaso.

11. Considerá una partícula de masa m en presencia de un campo gravitatorio uniforme g. La partícula está unida un punto fijo por medio de una varilla sin masa de longitud ℓ (péndulo esférico para les amigues).

    (a) Escribí el lagrangiano del sistema tomando como coordenadas generalizadas los ángulos esféricos, con el eje z alineado con el campo gravitatorio y el origen coincidiendo con el punto fijo.

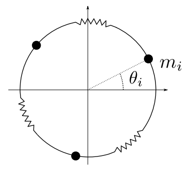
    (b) Notá que el lagrangiano posee simetría de traslación temporal y, por lo tanto, la función de energía h es una constante de movimiento. Mostrá, además, que h coincide con la energía mecánica E.

    (c) Notá que el problema también posee simetría de rotación en torno al eje z. ¿Qué coordenada resulta cíclica debido a esta simetría? Hallá la magnitud conservada asociada. ¿Te es familiar?

    (d) Usando la conservación anterior, escribí la energía mecánica en términos de un único ángulo y su derivada temporal. Identificá un término efectivo de energía cinética y otro de potencial efectivo. Graficá este último y describí cualitativamente los posibles movimientos del péndulo esférico.

    (e) Indicá qué condiciones iniciales debemos darle al sistema para que la varilla mantenga un ángulo fijo α con respecto a la vertical (es decir, para que el movimiento sea el de un péndulo cónico).

12. Tres partículas de masas m_1, m_2 y m_3 están enhebradas en un aro. Las partículas interactúan de a pares a través de tres resortes iguales con $V(\theta_i, \theta_j) = \frac{\kappa}{2}(\theta_i - \theta_j)^2$, donde $i, j = 1, 2, 3$, y κ es una constante (¿qué unidades tiene?). Usando el teorema de Noether, hallá las magnitudes conservadas.



13. Usando coordenadas cartesianas, escribí el lagrangiano de una partícula moviéndose en un campo gravitatorio $\mathrm{g} = -g\hat{e}_z$. Mostrá que una traslación infinitesimal en la dirección z deja invariante a la variación de la acción y, por ende, a las ecuaciones de movimiento. Si esto te sorprende, intentá explicar por qué es razonable que el problema presente esta simetría. Una vez superada la sorpesa, usá el teorema de la buena de Emmy para hallar la ley de conservación asociada. Además de esta y de las tres simetrías triviales del lagrangiano, hay otras dos más que son independientes de aquellas. Encontralas y mostrá que las seis leyes de conservación obtenidas te permiten resolver completamente la evolución temporal del sistema sin resolver ninguna ecuación diferencial. ¿Cuántas cantidades conservadas (en el sentido estricto de la palabra) hay? *Guardá esto en tu memoria, al menos, por algunos meses.*

14. Considerá nuevamente el problema 7 de la guía 1, utilizando el sistema de referencia y de coordenadas sugerido en el inciso (b) del mismo. El lagrangiano depende explícitamente del tiempo y la única coordenada generalizada que describe al sistema no resulta cíclica, por lo que no hay cantidades conservadas que se desprendan por inspección directa del lagrangiano. Hallá una transformación de Noether asociada a alguna simetría del problema y obtené la cantidad conservada asociada. Interpretá.

15. El problema de tres cuerpos que interactúan gravitatoriamente es sumamente complejo, pero si uno de ellos es mucho menos masivo que los otros dos, se puede tomar el siguiente atajo: resolver analíticamente el problema de los dos cuerpos de mayor masa y luego estudiar el movimiento del cuerpo liviano en un potencial dependiente del tiempo dado por el movimiento (ya predeterminado) de los otros dos. Con esto en mente, considerá un sistema binario formado por dos estrellas de masa similar que orbitan una en torno a la otra manteniendo constante la distancia entre ellas, siendo τ el período de dicha órbita. Usando sólo esta información, obtené una cantidad conservada para la trayectoria de un planeta que habita este sistema binario*.

*Notá que lo único que tenés que saber sobre la interacción gravitatoria es que es conservativa y que satisface la versión fuerte de la tercera ley de Newton. En otras palabras: se deriva de un potencial que depende únicamente de la distancia entre los cuerpos.