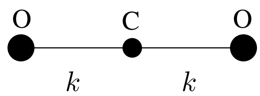
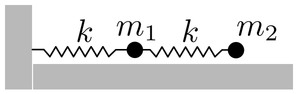
Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2022. Turno A (Ferraro).

Guía 4: *Pequeñas oscilaciones*

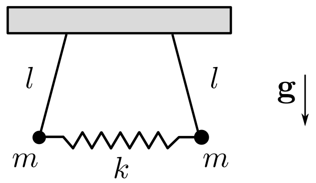
1. En equilibrio, la molécula de $\mathrm{CO_2}$ presenta una geometría lineal (ver figura) y, cerca de dicho equilibrio, puede modelarse según dos interacciones elásticas iguales (¿por qué elásticas y por qué iguales?).
   (a) Considerando únicamente los tres grados de libertad asociados al movimiento de los tres átomos en la dirección dada por los enlaces; obtené los modos normales de oscilación y describí cualitativamente los movimientos asociados a cada uno. Escribí también la solución general.
   (b) Obtené las coordenadas normales.
   (c) Si los átomos son libres de moverse en cualquier dirección, ¿cuántos modos normales **de vibración** existen? ¿Qué aspecto tienen? (no hagas cuentas, sólo describilos cualitativamente)



2. Para el sistema de la figura (los resortes tienen longitud natural ℓ_0):
   (a) Obtené los modos normales de oscilación y sus correspondientes frecuencias.
   (b) Considerando $m_1 = m_2$, resolvé en el caso en que las partículas experimentan una fuerza de fricción con el aire, proporcional a su velocidad. *Nota: mirar la sección 6.5 del libro de Goldstein y, si ves cosas que te asustan, mirar también la segunda mitad de la sección 1.5 del mismo libro.*

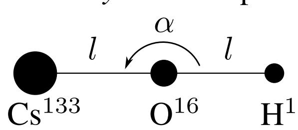


3. Obtené las ecuaciones de movimiento de dos péndulos conectados por un resorte, cuya longitud natural coincide con la distancia entre las partículas cuando las sogas se alinean con la vertical. Calculá las frecuencias naturales de vibración para pequeñas oscilaciones. Determiná las coordenadas normales. Analizá el movimiento para las condiciones iniciales: $\dot\theta_1(0) = \dot\theta_0, \dot\theta_2(0) = 0, \theta_1(0) = \theta_0, \theta_2(0) = 0$.

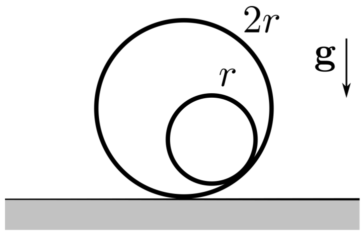


4. El CsOH en equilibrio es lineal. Cuando la molécula vibra exhibe tres tipos diferentes de interacciones:
   i) Una interacción entre el átomo de cesio y el de oxígeno, dada por un potencial de Lennard−Jones, $V_{\mathrm{CsO}} = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$, donde ϵ y σ son constantes y r es la distancia entre los dos átomos.
   ii) Una interacción análoga entre el par de átomos O−H, pero 15 veces más débil.
   iii) Una interacción elástica de curvatura entre las uniones Cs−O y O−H, con un potencial $V = \frac{1}{2}kl^2(\pi-\alpha)^2$, donde α es el ángulo indicado en la figura.

   Hallá el lagrangiano de la molécula para pequeños apartamientos del equilibrio. Obtené las frecuencias características de oscilación y los respectivos modos normales. Dibujalos y explicá detalladamente los movimientos de la molécula en cada caso. *Ayuda:* compará los pesos atómicos.

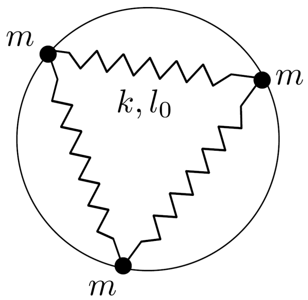


5. Hallá las frecuencias propias, modos y coordenadas normales de un sistema que consta de dos cilindros huecos, ambos de masa m, pero de radios r y $2r$. El cilindro pequeño rueda dentro del grande, y este último rueda sobre una superficie horizontal. Todas las rodaduras son perfectas (no hay deslizamientos).

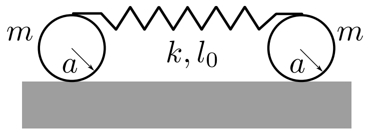


6. Determiná las frecuencias de oscilación de un sistema de dos osciladores unidimensionales idénticos, de frecuencia ω, que están acoplados por una interacción $V(x_1, x_2) = -ax_1x_2$.

7. Tres partículas iguales están enhebradas en un anillo fijo de radio a y unidas por resortes de constante elástica k y longitud natural l_0 (ver figura). Teniendo en cuenta la igualdad de las masas y la geometría del problema, aventurá una configuración de equilibrio que creas razonable. Indicá qué relación debe existir entre los parámetros del problema para que dicho equilibrio sea estable. En dicho caso, obtené las frecuencias y los modos normales para pequeños apartamientos del equilibrio hallado.



8. Hallá los modos normales y las frecuencias propias del sistema de la figura. No hay deslizamiento.



9. Cuatro partículas iguales están enhebradas en un aro fijo de radio a e interactúan a través de cuatro resortes de constante elástica k y longitud natural l_0. Hallá el equilibrio del sistema y mostrá que es estable. Calculá las frecuencias y modos normales de oscilación. Obtené las coordenadas normales. Si llamás z_2 a la coordenada normal correspondiente a la frecuencia no nula y no degenerada, escribí la solución para las siguientes condiciones iniciales: $z_1 = z_3 = z_4 = 0$, $z_2 = b$, $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \dot{z}_4 = 0$. Expresá el resultado en función de las coordenadas generalizadas originales θ_i.