Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2022. Turno A (Ferraro).

Guía 5: *Cinemática y dinámica del cuerpo rígido. Ángulos de Euler.*

1. A modo de repaso y para fijar ideas, considerá los siguientes puntos:

   (a) Mostrá que la velocidad angular de un sistema de coordenadas ligado a un cuerpo es independiente del sistema elegido.

   (b) Dado un punto O fijo al cuerpo, si $\mathbf{v}_O$ y $\mathbf{\Omega}$ son perpendiculares, mostrá que para cualquier otro punto O', también fijo al cuerpo, $\mathbf{v}_{O'}$ y $\mathbf{\Omega}$ resultan perpendiculares.

   (c) Mostrá que si $\mathbf{v}_O$ y $\mathbf{\Omega}$ son perpendiculares, entonces siempre podés encontrar un punto O' cuya velocidad $\mathbf{v}_{O'}$ sea nula. A partir de ello, mostrá que todos los puntos ubicados sobre una recta que pasa por O' y es paralela a $\mathbf{\Omega}$ tienen velocidad nula (el famoso eje instantáneo de rotación).

   (d) Dado el campo de velocidades para un cuerpo rígido: $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{OP}$. Mostrá que:

   $$\mathbf{r}_{OP} = \frac{1}{\Omega^2}\big[\mathbf{v}_P \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{v}_O \times \mathbf{\Omega} + (\mathbf{r}_{OP} \cdot \mathbf{\Omega})\mathbf{\Omega}\big].$$

   En particular, fijate qué fácil es obtener $\mathbf{r}_{OP}$ cuando este es perpendicular a $\mathbf{\Omega}$.

   (e) Calculá la distancia del centro de masa al eje instantáneo de rotación.

   (f) ¿Puede el eje instantáneo de rotación estar fuera del cuerpo rígido? Si tu respuesta es no, demostralo. Si tu respuesta es sí, contanos algún ejemplo.

   (g) Mostrá que si $\mathbf{v}_O$ y $\mathbf{\Omega}$ no son perpendiculares, entonces puede encontrarse un punto O' fijo al cuerpo tal que $\mathbf{v}_{O'}$ y $\mathbf{\Omega}$ sean paralelos.

   (h) Mostrá que si $\mathbf{v}_O$ es paralelo a $\mathbf{\Omega}$, entonces nunca puede encontrarse un un punto O' fijo al cuerpo tal que $\mathbf{v}_{O'}$ sea nulo ni perpendicular a $\mathbf{\Omega}$.

   (i) ¿Cuándo podemos separar la energía cinética en un término de rotación y otro de traslación?

   (j) ¿Qué relación hay entre los momentos principales de inercia de un sistema de partículas coplanares?

   (k) Mostrá que los momentos principales de inercia satisfacen la relación: $I_1 + I_2 \geq I_3$.

   (l) Mostrá que si un cuerpo tiene un eje de simetría, entonces el centro de masa está contenido en dicho eje y además es un eje principal de inercia.

   (m) Mostrá que si un cuerpo tiene un plano de simetría, entonces tanto el centro de masa como dos de los ejes principales de inercia están contenidos en dicho plano, y el tercer eje es perpendicular.

   (n) Mostrá que en un sistema colineal de partículas los momentos principales de inercia satisfacen que $I_1 = I_2$ y que $I_3 = 0$, donde el eje x_3 coincide con la línea de las partículas.

   (o) Un eje de simetría de orden n deja invariante al cuerpo frente a una rotación en $2\pi/n$. Mostrá que si un cuerpo tiene un eje de simetría con $n > 2$, el plano perpendicular al eje está degenerado.

   (p) Mostrá que cuando el tensor de inercia es totalmente degenerado, sus momentos principales de inercia son invariantes frente a cualquier rotación.

   (q) Escribí las condiciones de vínculo para: una esfera rodando sin deslizar sobre un plano; lo mismo para una moneda; una esfera rodando sin deslizar sobre una esfera que puede rodar libremente.

2. Calculá el tensor de inercia respecto del centro de masa para un cuerpo plano y homogéneo en forma de triángulo recto, de catetos iguales de longitud a y densidad de masa por unidad de superficie σ. Hallá los ejes principales de inercia y expresá el tensor de inercia en dichos ejes.

3. Determiná los ejes principales de inercia y calculá el tensor de inercia respecto del centro de masa para los siguientes sistemas:

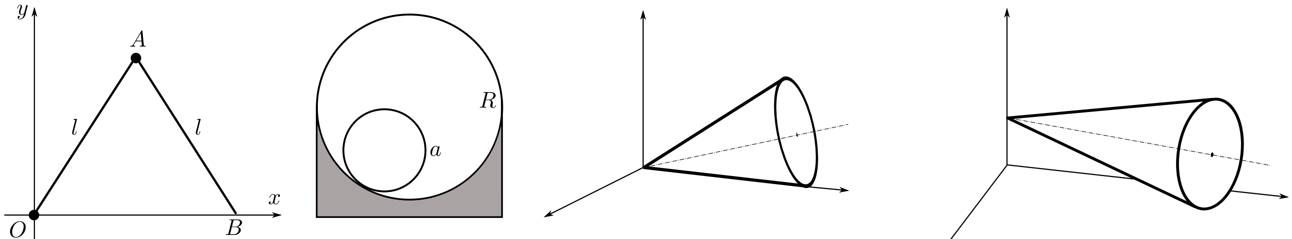
   (a) Cono circular recto de altura h y radio de la base r.

   (b) Anillo plano circular de radios r_1 y r_2.

   (c) Esfera de radio r.

   (d) Cubo de lado a.

4. Hallá la energía cinética de los siguientes sistemas:



(a) (b) (c) (d)

   (a) OA y AB son dos varillas delgadas homogéneas de longitud l unidas por una bisagra en A. La varilla OA gira en el plano de la figura alrededor de O; el punto B se desliza a lo largo del eje x.

   (b) Un cilindro homogéneo de radio a que rueda dentro de una superficie cilíndrica de radio R.

   (c) Un cono homogéneo rodando en un plano con su vértice apoyado en el plano.

   (d) Un cono homogéneo rodando en un plano y cuyo eje permanece paralelo al plano.

5. Un coche parte del reposo con una de sus puertas abierta a 90°. Cuando el automóvil acelera, la puerta se cierra. Calculá el tiempo que demora en cerrarse completamente si la aceleración $\mathbf{a}$ es constante y el centro de masa de la puerta está a una distancia d de las bisagras. Estimá numéricamente este tiempo dándole valores realistas a los distintos parámetros. *Ayuda:* $\int_0^{\pi/2} dx/\sqrt{\sin x} \approx 2.622$.

6. Un cilindro semicircular uniforme de masa m y radio a está apoyado sobre un plano horizontal. Escribí las ecuaciones diferenciales para pequeños desplazamientos de la posición de equilibrio estable.

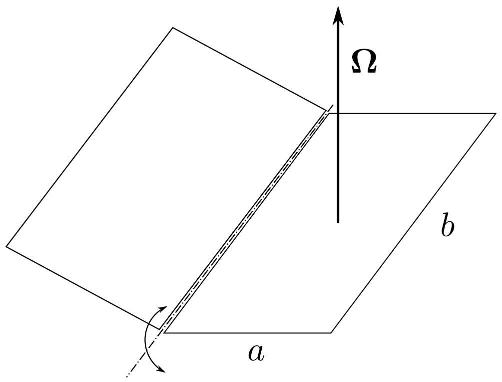
7. Mostrá que, en términos de los ángulos de Euler, las componentes de la velocidad angular en un sistema de ejes fijo al espacio son

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi \\
\omega_y &= \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi \\
\omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}.
\end{aligned}$$

8. Considerá dos placas rectangulares de lados a y b. Una se mantiene horizontal y está fija por su centro de masa a un eje que gira con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$ según el eje z. La otra está unida a la anterior por una bisagra ideal que le permite moverse como se indica en la figura. Determiná:

   (a) El lagrangiano y las ecuaciones de movimiento si no hay gravedad. ¿Hay algún equilibrio estable?

   (b) Repetí el inciso anterior para el caso en que hay un campo gravitatorio $\mathbf{g} = -g\hat{e}_z$

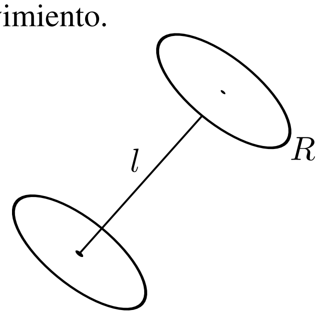


9. Los centros de dos volantes de radio R y masa m se encuentran unidos por una barra de longitud l. El ángulo formado por la barra y el plano de cada volante es siempre de $90°$. Cada volante gira libremente sobre sí mismo.

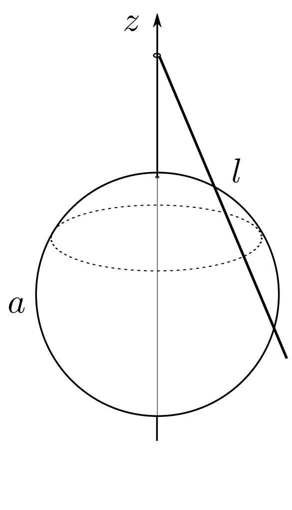
   (a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

   (b) Escribí el lagrangiano y encontrá constantes de movimiento. ¿Es $h = E$?

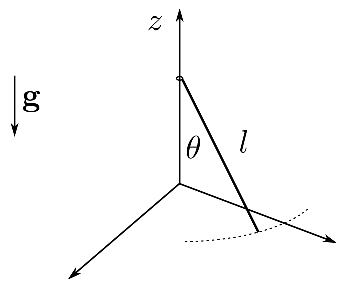
   (c) Escribí las ecuaciones de movimiento.



10. Uno de los extremos de una barra de longitud l y masa m puede deslizar a lo largo del eje z y tiene libertad para girar alrededor de este eje. La barra permanece apoyada sobre una esfera fija de radio a. Determiná el lagrangiano, las ecuaciones de movimiento y las magnitudes que se conservan.



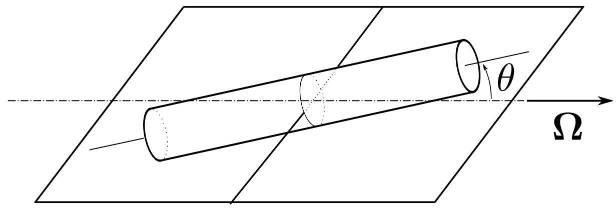
11. Un extremo de la barra de la figura puede moverse sobre el eje z, mientras que el otro permanece sobre el plano horizontal. En $t = 0$ la barra tiene una velocidad angular $\mathbf{\Omega} = \omega_0\,\hat{z}$, $\theta(0) = \pi/4$ y $\dot{\theta}(0) = 0$.



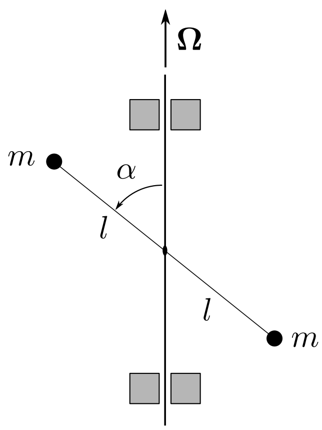
(a) Encontrá Ω_z y $\dot{\theta}$ como funciones de θ.

(b) Suponiendo que la barra sigue en contacto con el piso, ¿cuál es el menor valor de ω_0 para el cual la barra abandona el piso? *Sugerencia: Escribí la ecuación de movimiento para el centro de masa de la barra e imponé la condición de que la reacción del piso sólo puede apuntar hacia arriba.*

12. Un cilindro circular sólido de masa m, radio a y largo l está suspendido de un eje transversal a través de su centro de masa. El eje gira con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$. Suponiendo $l > \sqrt{3}a$, encontrá las posiciones de equilibrio estables y las frecuencias de oscilación para pequeños apartamientos respecto de los mismos.



13. Dos partículas están unidas a un eje vertical que gira con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, como se ve en la figura.



(a) Calculá el tensor de inercia para ejes fijos al espacio.

(b) Encontrá los ejes principales de inercia e interpretá.

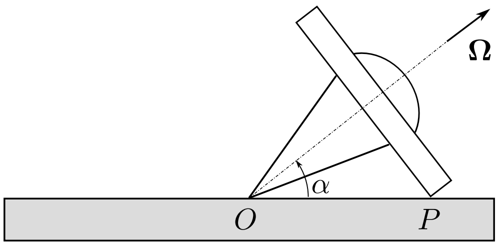
(c) Calculá el impulso angular $\mathbf{L}$ en el sistema fijo al espacio y en el sistema fijo al cuerpo.

(d) Calculá el par que ejercen *los cojinetes (!)* según ambos sistemas. Interpretá el resultado.

14. Si se arroja un objeto cuyos tres momentos principales de inercia son distintos, de tal manera que gire alrededor de un eje principal con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es relativamente estable, pero si se lo arroja tratando que gire alrededor del eje principal con momento intermedio, el movimiento es muy irregular ya que se ven grandes cambios en la posición del eje de rotación respecto del cuerpo (hacé la prueba con un libro al que le tengas poco aprecio). En efecto, usando las ecuaciones de Euler, mostrá que cuando un cuerpo rígido en un campo gravitatorio uniforme rota alrededor de un eje con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es estable, y es inestable si el eje corresponde al momento intermedio. *Sugerencia: Suponé que inicialmente la velocidad angular es casi paralela a un eje principal y fijate cómo evolucionan las componentes pequeñas.*

15. Una esfera homogénea de radio a se mueve sin deslizar por la superficie interna de un cilindro vertical de radio b. Obtené la trayectoria de la esfera.

16. Un trompo simétrico con un punto de apoyo fijo O y que inicialmente gira alrededor de su eje con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ toca el piso y casi instantáneamente (debido al rozamiento) pasa a rodar sin deslizar.



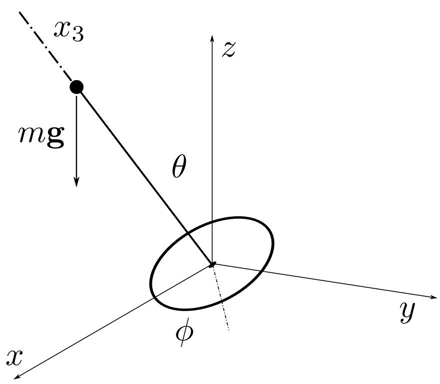
    (a) Mostrá que la componente de $\mathbf{L}_O$ en la dirección de OP se conserva durante el choque.

    (b) ¿Cuál es la nueva velocidad angular del trompo una vez que empieza a rodar sin deslizar?

    (c) Escribí las ecuaciones de Euler (en términos de los ángulos de Euler) después de que el trompo empieza a rodar sobre el plano. Calculá el valor de la fuerza de rozamiento.

    (d) ¿Cuánto tarda el trompo en dar una vuelta alrededor de O?

17. Un giróscopo rota alrededor del eje x_3 con velocidad angular constante $\Omega_3 = \omega$. Su momento de inercia axial es I_3 y el momento de inercia alrededor de cualquier eje en el plano x_1x_2 es I. Inicialmente el volante está en posición vertical $(\theta = \pi/2)$ y $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Un peso $m\mathbf{g}$ está fijo sobre el eje x_3 a una distancia d del origen. Por medio de las ecuaciones de Euler:



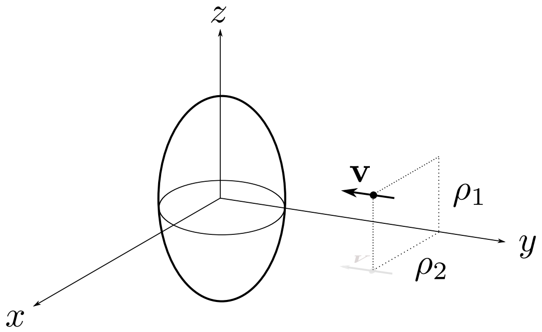
(a) Establecé las ecuaciones diferenciales para Ω_1, Ω_2 y Ω_3 en términos de θ, ϕ y ψ y sus derivadas.

(b) Linealizá esas ecuaciones bajo la suposición de que $\theta \simeq \pi/2$ y las velocidades son pequeñas.

(c) Resolvé el sistema obtenido e interpretá los resultados. *Sugerencia: eliminá en ambas ecuaciones los factores* $\exp i\omega t$ *usando la variable compleja* $\lambda = \theta - i\phi \sin\theta_0$.

(d) Discutí los límites de validez de la aproximación.

18. Una partícula que se mueve paralelamente al eje y con velocidad $\mathbf{v}$ y con parámetros de impacto ρ_1 y ρ_2, choca y queda fija a un elipsoide de revolución homogéneo, de semiejes $a = b$ y c. Describí el movimiento del elipsoide suponiendo que su masa es mucho mayor que la de la partícula incidente.



19. Una esfera homogénea de masa M y radio R está centrada en el origen. Una partícula de masa m se mueve con velocidad $\mathbf{v} = -v_0\,\hat{x}$ a lo largo de la recta definida por $z = y = R/2$. Cuando la partícula choca con la esfera queda pegada sobre su superficie. Describí el movimiento posterior del sistema si:

(a) Inicialmente la esfera no rota.

(b) Inicialmente la esfera rota con $\mathbf{\Omega} = \omega_0\,\hat{z}$.

(c) Inicialmente la esfera rota con $\mathbf{\Omega} = \omega_0\,\hat{z} + \omega_1\hat{y}$.