Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2022. Turno A (Ferraro).

Guía 6: *Formulación hamiltoniana.*

1. Escribí el hamiltoniano, las ecuaciones de Hamilton y dibujá los diagramas de fase para:
   (a) Un pingüino que se mueve en una dimensión sujeto a un resorte (oscilador armónico).
   (b) Un pingüino en un potencial central $U(r)$. Hallá constantes de movimiento. Los diagramas de fase dibujalos en los casos particulares de Kepler y del oscilador armónico isótropo. Discutí las órbitas posibles en esos casos. *Sugerencia: una vez paradx en el plano del movimiento, aprovechá las conservaciones para reducir el problema a uno equivalente donde sólo aparecen* r *y* p_r.
   (c) Un pingüino que cuelga de una cuerda en un campo gravitatorio uniforme (péndulo simple).
   (d) Un ~~pingüino~~ trompo simétrico (¿creíste que no te ibas a cruzar con más cuerpos rígidos? te equivocaste) con un punto fijo en un campo gravitatorio uniforme. Hallá constantes de movimiento.
   (e) Otro trompo simétrico, pero este se mueve libremente (sin gravedad).
   (f) Una máquina de Atwood (considerá los casos en que la polea es ideal o tiene masa M y radio R).

2. En presencia de un campo gravitatorio uniforme, un pingüino se mueve sobre la superficie de un iglú mágico centrado en el origen. El iglú es mágico porque su radio varía con el tiempo según $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtené el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discutí las cantidades conservadas. ¿Es el hamiltoniano igual a la energía mecánica?

3. Considerá un pingüino moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial $V = \frac{a(b+\dot{r}^2)}{r}$, donde r es la distancia al origen y a, b son constantes positivas con las unidades adecuadas. Encontrá los momentos generalizados p_r y p_θ, así como el hamiltoniano. Obtené las ecuaciones canónicas y mostrá que el impulso angular del pingüino se conserva. ¿Se conserva H? ¿Es $H = E$? Reducí el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

4. Dos pingüinos de masas m_1 y m_2 interactúan a través de un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Mostrá que el hamiltoniano del sistema puede escribirse como $H = H_{\text{cm}} + H_{\text{rel}}$, con
$$H_{\text{cm}} = \frac{P_{\text{cm}}^2}{2M} \quad \text{y} \quad H_{\text{rel}} = \frac{p_{\text{rel}}^2}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2},$$
donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, $\mathbf{L}$ es el momento angular total y p_{rel} es el momento canónicamente conjugado de r.

5. Dado un par de variables conjugadas q y p, considerá la transformación $Q = \ln(\frac{\sin p}{q})$ y $P = q \cot p$.
   (a) Mostrá que es canónica. *Ayuda: basta hallar una función generatriz (de cualquier tipo).*
   (b) Determiná las funciones generatrices $F_1(q, Q, t)$ y $F_2(q, P, t)$. ¿Son únicas?

6. Considerá una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_i, p_i)$ y $P_i = P_i(q_i, p_i)$ (es decir, sabemos que no depende del tiempo). ¿Bajo qué condiciones coinciden (numéricamente) el nuevo hamiltoniano con el viejo? En los casos en los que no coinciden, ¿tiene alguna relevancia esa diferencia?

7. Considerá un pingüino cargado en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$. Recordá que el potencial generalizado es $U = -(q/c)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$.

   (a) Escribí y resolvé las ecuaciones de Hamilton usando el gauge $\mathbf{A} = Bx\hat{y}$.

   (b) Volvé a hacer lo anterior pero ahora tomando en el gauge simétrico $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}$.

   (c) Demostrá que la transformación

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2) \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2)$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2) \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2),$$

   con $\omega = qB/mc$ es canónica y usala para volver a resolver nuevamente el problema.

8. Mostrá que la transformación:

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_Y\sin\lambda}{m\omega} \qquad p_x = -m\omega Y\sin\lambda + P_X\cos\lambda$$
$$y = Y\cos\lambda + \frac{P_X\sin\lambda}{m\omega} \qquad p_y = -m\omega X\sin\lambda + P_Y\cos\lambda$$

   es canónica. Dado $H(x, y, p_x, p_y)$, el hamiltoniano de un oscilador isótropo bidimensional de masa m y frecuencia ω; hallá el nuevo hamiltoniano $K(X, Y, P_X, P_Y)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton. Describí el movimiento cuando $Y = P_Y = 0$ en $t = 0$.

9. Demostrá las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson; siendo f, g, h funciones arbitrarias de las variables $\{p_i, q_i\}$, $F(f)$ una función de cualquiera de f y c una constante.

   (a) $[f, c] = 0$; $[f, f] = 0$; $[f, g] + [g, f] = 0$; $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$.

   (b) $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$; $\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]$.

   (c) $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$ (identidad de Jacobi).

   (d) $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$; $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$; $[f, q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$; $[f, p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}$.

   (e) $[f, g^n] = ng^{n-1}[f, g]$; $[g, F(f)] = F'(f)[g, f]$; $[f, F(f)] = 0$.

10. Demostrá que $\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$. ¿Qué obtenés para $f = q_i$ y $f = p_i$? Como corolario, probá que si f no depende explícitamente del tiempo, f es una constante de movimiento si y sólo si $[f, H] = 0$*. Usando esto y la identidad de Jacobi, mostrá que si f y g son constantes, también lo es $[f, g]$.

11. Mostrá que si una coordenada q_i es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de q_i. Observá que si f es una constante de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al Hamiltoniano. ¿Qué relación guarda esto con el teorema de Noether?

12. Calculá explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ con las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Calculá también $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$, $[L_x, L^2]$, donde $L^2 = |\mathbf{L}|^2$. ¿Pueden ser L_x y L_y simultáneamente variables canónicas (no conjugadas entre sí)? ¿Y L_x y L^2?

*Notá que esto establece una condición necesaria para que f y H sean variables canónicas (no conjugadas entre sí).