Primer parcial de Mecánica Clásica (A). Segundo cuatrimestre de 2022.

Entregá cada ejercicio en hojas separadas y justificá todas tus respuestas. Para aprobar es necesario tener el 60 % del examen resuelto correctamente y al menos la mitad de cada problema bien planteado.

Problema 1. Una partícula de masa m se mueve sin fricción dentro de una semiesfera de radio R. La partícula está unida a un resorte de constante elástica k y longitud natural nula que pasa por un orificio en el punto más bajo de la semiesfera y tiene su otro extremo fijo a un bloque de masa M que sólo se mueve verticalmente. El fragmento de resorte dentro de la esfera se mantiene siempre en contacto con la misma, como se ve en la figura. Hay gravedad.

(a) Indicá cuántos grados de libertad tiene el problema. Elegí coordenadas generalizadas y escribí el lagrangiano.

(b) Obtené las ecuaciones de movimiento del sistema. Sabiendo que $\pi R/2 < Mg/k$, indicá para qué rango de valores de la distancia del bloque al orificio es posible que el mismo se mantenga en reposo. ¿Qué sucede con la partícula si el bloque se encuentra en esta situación?

(c) Si la partícula se mueve en un círculo y manteniendo fijo un ángulo de 45° con la vertical; hallá, en función de datos, el período de dicho movimiento y la distancia a la cual reposa el bloque por debajo del orificio.

Problema 2. En presencia de un campo eléctrico uniforme, pero no constante, dado por $\vec{E} = -\frac{E_0 t}{\tau}\hat{e}_x$ (E_0 y τ parámetros positivos); una partícula de masa m y carga q se mueve en la dirección $\hat{e}_x$. Se sabe que la partícula parte del origen a $t = 0$ y, transcurrido un tiempo τ, vuelve a pasar por allí.

(a) Escribí el lagrangiano del sistema y mostrá que las ecuaciones de movimiento quedan invariantes ante traslaciones y transformaciones de galileo infinitesimales. Usando el teorema de Noether, obtené las cantidades conservadas asociadas a dichas simetrías. A partir de las mismas y en función de datos, obtené la solución $x(t)$.

(b) De la familia de funciones $x(t) = at^3 + bt + c$, encontrá la que mejor aproxima a la solución del problema según el principio de Hamilton. Compará con lo obtenido en el inciso anterior. ¿Qué concluís? ¿Era esperable?

Problema 3. Considerá un campo de fuerzas con **simetría cilíndrica**, cuya energía potencial viene dada por la expresión $V(r) = \beta \ln(r/r_0)$; donde r es la distancia al eje de simetría mientras que β y r_0 son constantes positivas.

(a) Elegí un sistema de coordenadas generalizadas y escribí el lagrangiano para una partícula de masa m que se mueve inmersa en dicho campo. Hallá, mirando únicamente el aspecto del lagrangiano, **tres** cantidades conservadas. Si, **tres**. Mostrá que un potencial de esta índole **no admite** órbitas no ligadas.

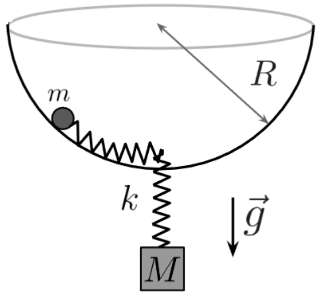
(b) Como corolario de lo anterior y sin nuevas cuentas, explicá por qué las órbitas donde la distancia al eje se mantiene fija son posibles. ¿Qué aspecto tienen? Para ellas, hallá la relación entre el período angular y la distancia al eje. Con esa relación en mente: ¿podría esta interacción ser de naturaleza puramente gravitatoria?

(c) Hallá el período de las oscilaciones radiales para órbitas que difieren ligeramente de las estudiadas en el inciso anterior. Mostrá que es imposible que este tipo de órbitas se cierren. *Nota: para esto último, considerá que la velocidad angular es constante y toma el valor de la correspondiente órbita de radio fijo.*

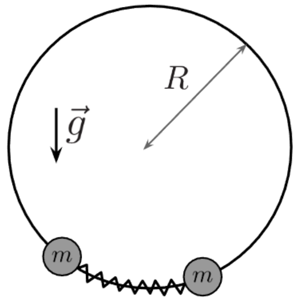
Problema 4. Dos partículas de masa m se mueven sin fricción engarzadas en un aro de radio R. Las partículas están unidas por un resorte de constante elástica desconocida y longitud natural $\ell_0 = 2\pi R/3$, el cual también está engarzado al aro, como se ve en la figura. Hay gravedad y se observa que el sistema queda en equilibrio estable cuando la posición de cada partícula, respecto del centro del aro, forma un ángulo de 30° con la vertical.

(a) Usá la información del equilibrio para averiguar el valor de la constante elástica del resorte y escribí el lagrangiano del sistema en la aproximación de pequeñas oscilaciones en torno a dicho equilibrio.

(b) Encontrá las frecuencias de los modos normales y sus respectivos vectores de amplitudes relativas. Esquematizá el movimiento de cada modo, indicando claramente cuál es el de alta frecuencia y cuál el de baja frecuencia.



(a) Problema 1



(b) Problema 4

Nota 1: en caso de no ser un aguafiestas, podés tomar el texto de esta hoja y hacer las transformaciones *partícula* → *chihuahua* y *bloque* → *pingüino*; obteniendo así un examen órdenes de magnitud más apasionante.
Nota 2: un pingüino no es un meme.