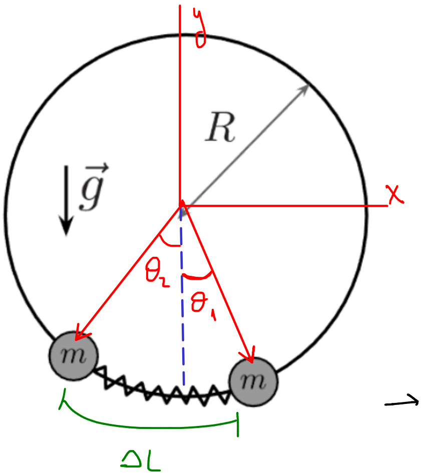


$$l_0 = \frac{2\pi R}{3}$$

* Por cómo tomo los ángulos $\theta_2 < 0$.

$$\bar{r}_i = R\,\hat{r}_{(\theta_i)} \longrightarrow \dot{\bar{r}} = R\,\dot{\theta}_i\,\hat{\theta}_i \nearrow \left[\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta_i}\right]$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right)$$ Energía cinética

$$V_{g_i} = m g\, \bar{r}_i \cdot \hat{y} \rightarrow V_{g(\theta_1,\theta_2)} = -mgR\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)$$ Potencial gravitatorio

$$V_{el} = \frac{k}{2}\left[\Delta L - l_0\right]^2 = \frac{kR^2}{2}\left[(\theta_1 - \theta_2) - \frac{2\pi}{3}\right]^2$$ Potencial Elástico

$$\rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right] - \frac{kR^2}{2}\left[(\theta_1 - \theta_2) - \frac{2\pi}{3}\right]^2 + mgR\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)$$

a) Por el enunciado sabemos que $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ y $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$

Es un equilibrio.

Viendo E-L (o Newton)

$$\boxed{\sin \pi/6 = \frac{1}{2}}$$

$$mR^2\ddot{\theta}_1 = -kR^2\left[\theta_1 - \theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right] - mgR\sin\theta_1$$

$$mR^2\ddot{\theta}_2 = kR^2\left[\theta_1 - \theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right] - mgR\sin\theta_2$$

$$\rightarrow 0 = -kR^2\left[\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{2\pi}{3}\right] - \frac{mgR}{2}$$

$$0 = \frac{kR^2\pi}{3} - \frac{mgR}{2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{3mg}{2\pi R}}$$

Tomo $\theta_1 = \frac{\pi}{6} + \xi_1$ y $\theta_2 = -\frac{\pi}{6} + \xi_2$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \sin^2(\pi/6)}$

Las derivadas de V son:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_i \partial\theta_i} = kR^2 + mgR\cos\theta_i \longrightarrow kR^2 + mgR\frac{\sqrt{3}}{2}$$

evalúo en $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_i \partial\theta_j} = -kR^2 \longrightarrow -kR^2$$

→ Usando que $k = \frac{3mg}{2\pi R}$ → $\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_i\partial\theta_i} = kR^2 + \pi\frac{\sqrt{3}}{3}kR^2 = kR^2\alpha$

$\alpha = \left(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\right)$

$$\rightarrow V \simeq \frac{1}{2}(\xi_1 \;\; \xi_2)\begin{pmatrix} k\alpha R^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & k\alpha R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{pmatrix}$$

Puedo definir $\eta_i = R\xi_i$ para absorber las R

$$\rightarrow V \simeq \frac{1}{2}\underbrace{(\eta_1 \;\; \eta_2)}_{\vec{\eta}^{\,t}}\underbrace{\begin{pmatrix} k\alpha & -k \\ -k & k\alpha \end{pmatrix}}_{\mathbb{K}}\underbrace{\begin{pmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{pmatrix}}_{\vec{\eta}}$$

La energía cinética es exacta a 2do orden

$$T = \frac{1}{2}(\dot\eta_1 \;\; \dot\eta_2)\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{\mathbb{M}}\begin{pmatrix}\dot\eta_1 \\ \dot\eta_2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^{\,t}\,\mathbb{M}\,\dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2}\vec{\eta}^{\,t}\,\mathbb{K}\,\vec{\eta}}$$

b) La ec. de mov. es

$$\mathbb{M}\ddot{\vec{\eta}} + \mathbb{K}\vec{\eta} = 0 \rightarrow \vec{\eta} = \vec{A}e^{i\omega t}$$

$$\rightarrow \left[-\mathbb{M}\omega^2 + \mathbb{K}\right]\vec{A} = 0 \Rightarrow \det\left[\mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M}\right] = 0$$

Condición para sol. no triviales

$$\rightarrow \det\left|\begin{pmatrix} k\alpha - m\omega^2 & -k \\ -k & k\alpha - m\omega^2 \end{pmatrix}\right| = (k\alpha - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

Cada vez que alguien distribuye un det. muere un chihuahua (o peor, un pingüino)

$$\rightarrow (k\alpha - m\omega^2)^2 - k^2 \underset{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}{=} (k\alpha - m\omega^2 + k)(k\alpha - m\omega^2 - k).$$

$$= \left(k(\alpha+1) - m\omega^2\right)\left(k(\alpha-1) - m\omega^2\right) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} k(\alpha+1) - m\omega^2 = 0 \\ k(\alpha-1) - m\omega^2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\omega_\pm^2 = \frac{k(\alpha \pm 1)}{m}}$$

Explicitamente

$$\omega_+^2 = \frac{k}{m}\left(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 1\right) = \frac{g}{\pi R}\left(3 + \pi\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ Alta frecuencia

$$\omega_-^2 = \frac{k}{m}\left(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 1\right) = \frac{g}{R}\frac{\sqrt{3}}{2}$$ baja frecuencia

Igual es mas cómodo trabajar con k y α

Autovectores

$$\rightarrow \begin{pmatrix} k\alpha - m\omega_\pm^2 & -k \\ -k & k\alpha - m\omega_\pm^2 \end{pmatrix} \vec{A}_\pm = 0$$

Estoy calculando ambos a la vez (ojo al "$\pm$")

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \cancel{k\alpha} - k(\cancel{\alpha} \pm 1) & -k \\ -k & \cancel{k\alpha} - k(\cancel{\alpha} \pm 1) \end{pmatrix} \bar{A}_\pm = 0$$

$$\begin{pmatrix} \mp k & -k \\ -k & \mp k \end{pmatrix} \bar{A}_\pm = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 1 & \pm 1 \end{pmatrix} \vec{A}_\pm = 0$$

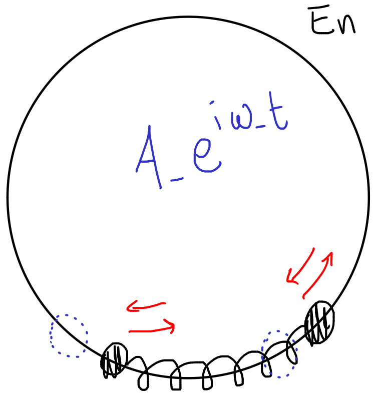
$$\longrightarrow \pm A_{\pm_1} + A_{\pm_2} = 0 \longrightarrow A_{\pm_2} = \mp A_{\pm_1}$$

Por lo tanto

$$\vec{A}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

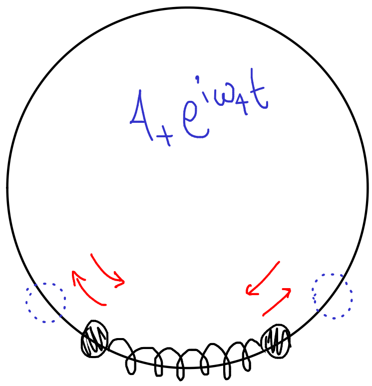
$$\rightarrow \bar{\eta}(t) = \mathrm{Re}\left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_+ t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_- t} \right]$$

y ahora los dibujitos



En el modo con A_- ambas masas se mueven a la par, sin estirar el resorte. Esto es consistente con la frecuencia

$$\omega_-^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{g}{R} \rightarrow \text{sólo hay contribuciones del } V_g$$



En el modo A_+ oscilan en contrafase y por lo tanto el resorte se contrae (y expande)