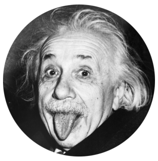

Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2022. Turno A (Ferraro).

Guía 8: *Relatividad especial*

1. Una buena manera de perderle el miedo a las tenebrosísimas transformaciones de Lorentz es manteniéndose siempre cerca de algún tipo de paralelismo con las simpatiquísimas transformaciones de Galileo. Para ello, consideremos dos sistemas de referencia interciales: $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$. Hay, básicamente, tres razones por las cuales dos sistemas de referencia inerciales podrían no coincidir, a saber:

   - Que haya movimiento relativo entre ellos. Si los orígenes espacio temporales de ambos sistemas coinciden y $\mathcal{S}'$ se mueve con respecto a $\mathcal{S}$ con velocidad $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, la transformación de coordenadas (se la suele llamar *boost*), según Galileo, es:
   $$\begin{aligned} x' &= x - v_x t\,, \\ y' &= y - v_y t\,, \\ z' &= z - v_z t\,, \\ t' &= t\,, \end{aligned}$$
   - Podría no haber movimiento relativo entre los sistemas pero que sus orígenes estén *trasladados*. Notar que la diferencia entre los orígenes de ambos sistemas puede ser tanto espacial como temporal. Si la posición relativa de $\mathcal{S}'$ respecto de $\mathcal{S}$ es un vector constante $\vec{d}$ y $\mathcal{S}'$ prende su cronómetro un tiempo T después que $\mathcal{S}$, entonces:
   $$\vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{d} \quad \text{y} \quad t' = t - T,$$
   - No sucede ninguna de las anteriores pero los sistemas están *rotados* (rotados, no rotando, ¡ojo!) entre sí. Dicho de otra forma, existe una matriz de rotación $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que:
   $$\vec{x}\,' = R\vec{x} \quad \text{y} \quad t' = t.$$

   Desde luego, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ pueden diferir por cualquier combinación de las razones anteriores. En efecto, las transformaciones de Galileo forman un *grupo*, en el sentido de que la aplicación sucesiva de cualquier par de transformaciones de Galileo, da otra transformación de Galileo (¿por qué?). Notar que una transformación de Galileo arbitraria no tiene por qué caer en ninguna de las diez categorías anteriores[1] (¿por qué diez si arrancamos diciendo que eran tres las razones por las cuales $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ podían diferir?)

   (a) Mostrá que las tres leyes de Newton[2] son invariantes ante cualquier transformación de Galileo.

   (b) Mostrá que, según las leyes de transformación anteriores, no puede existir un vector velocidad cuyo valor sea el mismo en todos los sistemas de referencia inerciales. Mostrá también que es imposible encontrar un vector velocidad **cuyo módulo** sea independiente del sistema de referencia.

   (c) Si A y B son dos eventos cualesquiera, mostrá que tanto la distancia entre ellos, $|\Delta\vec{x}| \equiv |\vec{x}_B - \vec{x}_A|$, como el intervalo de tiempo que transcurre entre los mismos, $\Delta t \equiv t_B - t_A$, son invariantes ante transformaciones de Galileo.

   De este ejercicio deberías salir convencidx de que el grupo de Galileo es, entonces, el conjunto formado por todas aquellas transformaciones entre sistemas inerciales asociadas a la totalidad de las simetrías del espacio, el tiempo y las leyes del movimiento en sus concepciones newtonianas.

[1] Sin embargo, es sencillo convencerse de que, dados dos sistemas inerciales arbitrarios, se puede ir de uno a otro mediante una aplicación sucesiva de transformaciones en la que sólo intervengan miembras de las tres categorías listadas arriba.

[2] Tal vez te convenga re-escribir la tercera como "en un sistema aislado de dos partículas, el momento lineal neto se conserva".

2. Estábamos muy a gusto con las transformaciones de Galileo hasta que llegó un aguafiestas a señalarnos un inquietante hecho: las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío.

   (a) ¿Por qué es inquietante que la luz se propague en el vacío? Para responder esta pregunta, pensá en qué consecuencias tiene este hecho si decidiéramos (en efecto, lo hacemos) mantener en pie la idea de que las leyes de la física son las mismas según todos los observadores inerciales.

   (b) Si la velocidad de la luz no depende del observador[3], es evidente que las transformaciones de Galileo quedan obsoletas. Algo menos evidente (desde el punto de vista intuitivo, porque desde el punto de vista matemático es una consecuencia directa) es que la noción de un espacio y un tiempo absolutos también queda obsoleta (las distancias y los intervalos de tiempo dejan de ser invariantes ante cambios de sistemas inerciales). Armate un par de experimentillos mentales, con rayos de luz y cosas moviéndose, que permitan ilustrar estos dos disparates de la naturaleza.

   (c) Suponiendo que el espacio es isótropo y homogéneo, y que el tiempo es también homogéneo; mostrá que, dado un observador inercial $\mathcal{S}$ y otro $\mathcal{S}'$ que se mueve con velocidad $\vec{v}$ respecto del primero; el módulo de alguna velocidad, c, resulta independiente del observador si y solo si:

   $$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - |d\vec{x}\,|^2 = c^2 dt'^2 - |d\vec{x}\,'|^2 \equiv ds'^{\,2}$$

   Ayuda: Para la implicación no trivial, mostrá primero que $ds^2 = \alpha(v) ds'^{\,2}$, donde $\alpha(v)$ depende sólo del módulo de la velocidad relativa entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$. Luego mostrá que $\alpha(v) = 1$ para todo v.

   (d) Sabemos entonces que si existe alguna velocidad cuyo módulo no depende del observador, las distancias y los intervalos de tiempo no son invariantes, mientras que *el intervalo relativista*, definido según $\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - |\Delta\vec{x}\,|^2$, sí lo es. Así como el grupo de Galileo es el conjunto de transformaciones que preservan distancias e intervalos de tiempo; el conjunto de todas las transformaciones que dejan invariante al intervalo relativista se conoce como el *grupo de Poincaré*. Igual que en el caso galileano, se pueden listar diez transformaciones independientes básicas de las cuales se obtienen todas las demás. Mostrá que las siete del segundo y tercer item del problema anterior (las tres traslaciones espaciales, la traslación temporal y las tres rotaciones espaciales) dejan invariante al intervalo relativista y son, por ende, elementos del grupo de Poincaré. *Las transformaciones asociadas a rotaciones espaciales y traslaciones espacio-temporales operan igual que en el caso no relativista y no introducen, por si solas, nada novedoso con respecto a lo que ya sabíamos.*

   (e) Mostrá que, haciendo $T \equiv it$, el intervalo resulta, salvo un signo global, una distancia euclídea en cuatro dimensiones[4]. Las transformaciones asociadas a los *boosts* en las tres direcciones espaciales pueden pensarse entonces como rotaciones en los tres planos perpendiculares a la coordenada it. Mostrá que, si la velocidad relativa entre los sistemas es $\vec{v} = v\hat{e}_x$, entonces:

   $$ct' = \gamma\,(ct - \beta x)\ ,\ x' = \gamma\,(x - \beta ct)\ ,\ y' = y\ ,\ z' = z,$$

   donde $\beta \equiv v/c$ y $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$. A partir de esto, mostrá que si la velocidad relativa es $\vec{v}$:

   $$ct' = \gamma\left(ct - \vec{\beta}\cdot\vec{x}\right)\ ,\ \vec{x}\,' = \vec{x} - \gamma\vec{v}t + (\gamma - 1)\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{v^2}\vec{v}\,,$$

   donde $\vec{\beta} \equiv \vec{v}/c$ y $v \equiv |\vec{v}|$. ¿Qué sucede si $c \to \infty$? ¿Sigue valiendo la analogía con rotaciones?

[3] En realidad, lo que no depende del observador es *el módulo* de la velocidad de la luz. Desde luego que la dirección en la que se mueve un rayo de luz sí depende de quién lo está mirando (una simple rotación de ejes es suficiente para convencerse de esto).

[4] O, dicho de otra manera, el intervalo es *"una distancia"* en un espacio cuya métrica resulta diag $(+1, -1, -1, -1)$.

3. Explicá por qué (si querés, con un ejemplo) si existe una velocidad cuyo módulo es el mismo en todos los sistemas de referencia, entonces nada[5] puede moverse a una velocidad de módulo mayor.

4. El intervalo relativista es una resta de cosas y no tiene un signo definido (en contraste con lo que sucede con las distancias galileanas). Sin embargo, al ser invariante, el signo que adquiera en un sistema de referencia es el mismo que adquiere en todos los demás. Esta observación, de aspecto insulso, da lugar a una de las características más profundas de la teoría: dado que existe una velocidad cuyo módulo es invariante, el espacio tiempo adquiere, automáticamente, una estructura causal bien definida. Veamos:

   (a) Si dos eventos cualesquiera están separados por un intervalo negativo, decimos que los mismos están separados *espacialmente*. ¿Qué podés decir de estos dos eventos?

   (b) Cuando los eventos están separados por un intervalo nulo, decimos que están separados por un *rayo de luz*. ¿Qué podés decir de estos dos eventos? Cuidado, no te dejes seducir por el nombre.

   (c) Si dos eventos están separados por un intervalo positivo, decimos que están separados *temporalmente*. ¿Podés asegurar algo sobre estos dos eventos? ¿Qué clase de pares de eventos *necesariamente* tienen que estar separados por un intervalo positivo?

   (d) A y B son dos eventos separados espacialmente. Mostrá que siempre existe un observador para el cual son simultáneos; uno donde A sucede antes que B; y otro donde B sucede antes que A. ¿Es esto una paradoja? ¿Debemos desechar la teoría y volver a los dulces y cálidos brazos de Galileo?

   (e) En contraparte, mostrá que si el intervalo entre los eventos es mayor o igual a cero, entonces el orden cronológico entre los mismos es independiente del observador.

5. Una forma simpática (y útil) de ilustrar lo discutido en el ejercicio anterior son los famosos diagramas de Minkowski[6]. Por simplicidad, en este ejercicio considerá que x es la única dirección espacial relevante y que el sistema $\mathcal{S}$ es la Tierra, la cual consideraremos como un sistema inercial[7].

   (a) En un diagrama ct vs x, con el origen siendo las coordenadas espacio-temporales de tu nacimiento (evento A), indicá en qué región debería quedar dibujado el nacimiento de unx de tus abuelxs (evento B) y en qué región debería quedar dibujada tu inscripción a Exactas (evento C). La primera región se conoce como *el pasado* y la segunda como *el futuro*, respecto del evento A. Ambas regiones forman *el cono de luz* del evento A. También podés definir los conos de luz de B y C en el mismo diagrama. Notá que si un evento está en el cono de luz de otro, es recíproco.

   (b) ¿Qué sucede con los conos de luz en el límite $c \to \infty$? ¿Era de esperar?

   (c) Si dibujás tu *línea de universo* (es decir, tu trayectoria en el diagrama de Minkowski) entre el evento A y el C, ¿qué dos características geométricas debe satisfacer esta curva sí o sí?

   (d) En el mismo diagrama, dibujá los ejes ct' y x' de un observador $\mathcal{S}'$ que se mueve con velocidad $\vec{v} = v\hat{e}_x$ con respecto a la Tierra. Como ya mostraste antes, hay eventos que son simultáneos para $\mathcal{S}'$ pero no lo son para los observadores terrestres. ¿En qué región del diagrama están?

   (e) Pensá algún evento concreto (no necesariamente ubicado en nuestro planeta) que haya sucedido antes de tu nacimiento según Felipe Pigna pero que suceda luego de tu nacimiento según un historiador alienígena que pistea por el cosmos, alejándose de la Tierra a velocidades relativistas.

[5] ¿Nada?

[6] Minkowski fue docente de Einstein y, además, fue el sujeto que se dio cuenta de lo que mostraste en el problema 2: que la invariancia de c se puede re-interpretar en términos de la invariancia de la "distancia" inducida por la métrica diag $(+1, -1, -1, -1)$. De hecho, a esa métrica se la conoce como la *métrica de Minkowski*.

[7] Galileo está revolcándose en su tumba.

6. El tiempo propio de un sistema es el tiempo que mide un reloj que se encuentra en reposo con respecto al mismo. Análogamente, la longitud propia de un objeto es la que mide un observador en reposo con respecto al objeto. Particularizá las transformaciones de Lorentz para obtener una relación entre las longitudes y tiempos propios con las longitudes y tiempos medidos por un observador en movimiento relativo con respecto al sistema propio (estas dos **particularizaciones**[8] de las transformaciones de Lorentz son las que se conocen como *contracción de longitudes* y *dilatación temporal*).
   Representá estos dos fenómenos en un diagrama de Minkowski.
7. A partir de la expresión para la transformación de velocidades que viste en la teórica; mostrá que si una onda electromagnética se propaga en cierta dirección $\hat{n}$ respecto de un observador $\mathcal{S}$, un observador en un sistema $\mathcal{S}'$ con velocidad relativa $\vec{v}$ verá a la misma onda propagándose en la dirección:
$$\hat{n}' = \frac{\hat{n} + (\gamma - 1)\,(\hat{n}\cdot\vec{v})\vec{v}/v^2 - \gamma\vec{v}/c}{\gamma\,(1 - \hat{n}\cdot\vec{v}/c)},$$
   donde $v \equiv |\vec{v}|$. Mostrá también que las frecuencias medidas en cada sistema se relacionan según:
$$\omega' = \gamma\,(1 - \hat{n}\cdot\vec{v}/c)\,\omega,$$
   que es la expresión del efecto Doppler relativista. Comparala con el efecto Doppler galileano.
8. A partir de los resultados del ejercicio anterior, concluí que $(\omega/c, \vec{k})$ (donde $\vec{k}$ es el vector de onda) es un *cuadrivector* (*cuadrivector de onda*), pues sus componentes transforman igual que las coordenadas del espacio-tiempo. ¿Cómo calculás la norma de un cuadrivector? ¿Cuánto vale la de este?
9. Cansadxs de cumplir años el mismo día, dos gemelxs construyen una nave y, en plena fiesta de cumpleaños, la hermana emprende un paseo rectilíneo de ida y vuelta a su inercial hogar, dado por:
$$x(t) = \frac{L}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right], \text{ para } t \in [0, T],$$
   donde L es el máximo alejamiento de la nave y T es la duración del periplo según el hermano terrestre.
   (a) Obtené $\mathcal{T}$, la duración del periplo para la gemela viajera (expresalo en términos de una integral[9]) y mostrá que $\mathcal{T} < T$; por lo que, cuando se reencuentran, ella es más joven que él[10].
   (b) Mostrá que en el caso no relativista se tiene $\mathcal{T} \simeq T$; mientras que en el caso ultra-relativista (es decir, cuando $L \to cT/\pi$), se tiene $\mathcal{T} \simeq (2/\pi)T$. ¿Por qué $\mathcal{T}$ no puede ser arbitrariamente pequeño? Esquematizá alguna otra trayectoria para la cual $\mathcal{T}$ sí pueda ser arbitrariamente pequeño.
   (c) ¿A qué instante terrestre corresponde la imagen de nuestro planeta que la gemela ve justo antes de emprender el regreso a casa? Particularizá el resultado a los casos no relativista y ultra-relativista.
   (d) En el caso ultra-relativista; esquematizá lo anterior en un diagrama de Minkowski y describí, cualitativamente, cómo ve la gemela (que dispone de un telescopio bien poderoso) la realidad terrestre a lo largo del viaje. ¿Siempre puede *ver* la realidad terrestre?
   (e) Las trayectorias que esquematizaste en el inciso (b) y que dan lugar a valores de $\mathcal{T}$ arbitrariamente chicos se caracterizan porque sus tramos acelerados duran muy poco. Considerá el ratito que le demora a la gemela frenar y pegar la vuelta: ¿transcurrió un ratito en la Tierra? ¿Se condice esto con cómo la gemela *ve* (en el sentido literal de la palabra) a la Tierra en ese ratito?

[8]Enfatizamos esta palabra porque un error común, cuando unx está aprendiendo relatividad especial, es el de usar estas expresiones para transformar tiempos y longitudes entre sistemas cualesquiera. Esto es un delito y aquel que lo cometa será debidamente castigadx. Las expresiones obtenidas en este problema sólo funcionan cuando uno de los dos sistemas es el sistema propio.

[9]Esta es una de las famosas integrales elípticas y sus valores están tabulados.

[10]¿Por qué no podemos llegar a la conclusión opuesta si nos paramos en un sistema de referencia fijo a la hermana?

10. Escribí el lagrangiano relativista para una partícula libre de masa m.

    (a) Obtené la energía E y el momento $\vec{p}$. Chequeá el límite de bajas velocidades en ambos casos.

    (b) De lo anterior, obtené la *Hey Jude* de las ecuaciones. ¿Por qué tanto alboroto por una mera constante en la energía? ¿No es que la energía estaba definida a menos de una constante?

    (c) Verificá que $(E, \vec{p})$ son las componentes del cuadrivector momento $P \equiv mU$, donde $U = \gamma(c, \vec{u})$ es el cuadrivector velocidad. Obtené el invariante asociado a la norma de P.

11. En el espacio, un cohete se impulsa gracias a la emisión de gases a velocidad relativa constante, V_G. Usando la conservación del impulso, mostrá que la velocidad del cohete y su masa se relacionan según:

$$m\frac{du}{dm} = -V_G\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right).$$

    Integrá la ecuación anterior y obtené la velocidad del cohete como función de la fracción entre su masa y la masa inicial. ¿Cómo conviene que sea V_G para optimizar el resultado?

12. Escribí el lagrangiano relativista y obtené las ecuaciones de movimiento para una partícula de masa m y carga q inmersa en un campo electromagnético. Resolvelas para el caso en el que sólo está presente un campo magnético constante $\vec{B} = B_0\hat{e}_z$. ¿Qué obtenés en el límite no relativista?

13. Una partícula de masa m y velocidad v choca con otra de masa M que está en reposo y absorbe a la primera en el proceso (choque plástico). Encontrá la masa y la velocidad de la partícula resultante.

14. Una partícula de masa m está en reposo cuando, repentinamente, se desintegra.

    (a) Si emergen dos partículas de masas m_1 y m_2, mostrá que la energía **cinética** de cada una es:

$$T_{1,2} = \Delta mc^2\left(1 - \frac{m_{1,2}}{m} - \frac{\Delta m}{2m}\right),$$

    donde $\Delta m \equiv m - m_1 - m_2$ se conoce como el *exceso de masa* del proceso.

    (b) Si emerge un número arbitrario de partículas, mostrá que la máxima energía cinética posible que puede adquirir cualquiera de ellas viene dada por la expresión anterior.

15. Una partícula de masa m se mueve con velocidad $\vec{v}$ y choca con otra igual que se encuentra en reposo. Obtené las energías de las dos partículas luego del choque y la dirección en la que se mueve una de ellas, sabiendo que la otra sale en un ángulo θ con respecto a la dirección de $\vec{v}$.

16. Los fotones son las partículas portadoras del campo electromagnético (en criollo, la luz) y su masa es nula (¿por qué?). La mecánica cuántica nos enseña que su energía es $E = \hbar\omega$ ($\hbar$ es la constante de Planck reducida y ω es la frecuencia del fotón) y su momento lineal es $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ($\vec{k}$ es el vector de onda).

    (a) Escribí el cuadrimomento y compará con el cuadrivector del problema 8. Calculá la norma del cuadrimomento del fotón. ¿Cuánto vale? ¿Qué relación obtenés entre ω y $|\vec{k}|$ a partir de ello?

    (b) Un fotón de longitud de onda λ incide sobre un electrón en reposo y emerge con una longitud de onda λ', formando un ángulo θ con respecto a la dirección de incidencia. Mostrá que:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_e c}\left(1 - \cos\theta\right),$$

    donde m_e es la masa del electrón. Este fenómeno se conoce como *scattering de Compton*.