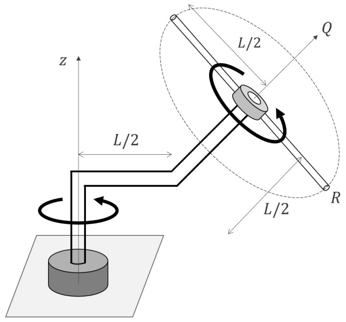
Segundo parcial de Mecánica Clásica (A). Segundo cuatrimestre de 2022.

Entregá cada ejercicio en hojas separadas y justificá todas tus respuestas. Para aprobar es necesario tener el 60 % del examen resuelto correctamente y al menos la mitad de cada problema bien planteado.

Problema 1. El sistema de la figura consiste en una barra de masa despreciable unida en su origen a una base que le permite girar libremente alrededor del eje z. La barra se tuerce en un ángulo recto hacia un tramo de longitud $L/2$, luego del cual vuelve a torcerse hacia otro tramo de la misma longitud. Al final de la barra se encuentra un rulemán, cuya masa también es despreciable, unido al centro de una varilla cilíndrica y homogénea de masa M, largo L y radio R. El rulemán sólo permite que la varilla gire libremente en torno al eje Q. Respecto de su centro de masa, uno de los momentos principales de inercia de la varilla vale $I = MR^2/2$ y otro $I' = M(3R^2 + L^2)/12$. El ángulo del segundo codo es tal que el punto más bajo por el que pasan los extremos de la varilla está a la misma altura que ambos pliegues de la barra. No hay gravedad.



(a) Argumentá, sin hacer cuentas, cuánto vale el momento principal de inercia restante. Elegí una terna de ejes principales para escribir el tensor de inercia (y escribilo), indicá cuántos grados de libertad tiene el sistema y elegí un sistema de coordenadas generalizadas. Esquematizá todo esto en un dibujo.

(b) Escribí el lagrangiano e indicá dos cantidades conservadas (no hace falta que des sus expresiones).

(c) Si la base ahora obliga a girar a la barra con una velocidad angular constante Ω, volvé a escribir el lagrangiano (no hagas cuentas de más, caso todo el trabajo ya lo hiciste) y mostrá que el hamiltoniano es una cantidad conservada. ¿Es igual a la energía mecánica? *Ayuda: descartá **todos** los términos que puedas del lagrangiano.*

(d) Identificá en el hamiltoniano un término cinético y otro de potencial efectivo y, partir de ello, describí los posibles movimientos del sistema. Hallá los equilibrios y analizá la estabilidad de los mismos.

Problema 2. Considerá el *modelo de juguete* para una partícula liviana y ultrarelativista que rebota en el suelo, dado por el hamiltoniano $H(q,p) = c|p| + V(q)$, donde:

$$V(q) = \begin{cases} \infty & \text{si } q < 0 \\ mgq & \text{si } q > 0, \end{cases}$$

siendo g la intensidad del campo gravitatorio y m la masa de la partícula.

(a) Dibujá los diagramas de fase. ¿Qué forma tienen? Escribí las ecuaciones de Hamilton y hallá, en función de la energía, el tiempo que transcurre entre dos pasajes sucesivos de la partícula por la altura máxima.

(b) Hallá la variable de acción J en términos de la energía y usala para volver a calcular el período del movimiento.

(c) Obtené, para un tramo de subida, la función generatriz que transforma al par $\{p, q\}$ en las variables de ángulo-acción $\{\theta, J\}$. Escribí explícitamente, en dicho tramo, las transformaciones de coordenadas $\theta(q,p)$ y $J(q,p)$.

Problema 3. Respecto de cierto sistema inercial $\mathcal{S}$, una partícula relativista de masa m y carga $q > 0$ se mueve en la dirección x en presencia de un campo eléctrico constante $\vec{E} = -E_0 \hat{e}_x$ con $E_0 > 0$ (el campo magnético es nulo en $\mathcal{S}$). A $t = 0$, la partícula parte de $x = 0$ con cierta velocidad inicial $v_0 \hat{e}_x$ en contra de la dirección del campo eléctrico.

(a) Escribí el lagrangiano, obtené una cantidad conservada y escribí la ecuación de Euler-Lagrange para la partícula. Sin hallar (aún) $x(t)$; mostrá que, para tiempos grandes, la partícula tenderá a realizar un movimiento rectilíneo y uniforme en la dirección del campo eléctrico con una velocidad que, asintóticamente, es la de la luz. Aún sin hallar $x(t)$; obtené, en función de datos, la distancia entre el punto de retorno y el origen.

(b) Ahora sí: mostrá que la línea de universo de la partícula se parametriza, en el sistema $\mathcal{S}$, según:

$$x(t) = \frac{mc^2}{qE_0} \left[\gamma_0 - \sqrt{1 + \left(\frac{qE_0}{mc} t - \gamma_0 \beta_0 \right)^2} \right],$$

donde $\beta_0 \equiv v_0/c$ y $\gamma_0 \equiv \left(1 - \beta_0^2\right)^{-1/2}$. Bocetala en un diagrama de Minkowski (podés tener en cuenta lo que ya sabés del inciso anterior). *Ayuda: para llegar a la expresión anterior tenés dos caminos (usá el que te plazca):*
Camino 1: de la ecuación de Euler-Lagrange podés obtener, sin mucho trabajo, $\dot{x}(t)$. Integrás y gol.
Camino 2: de la cantidad conservada podés obtener una ecuación diferencial de primer orden para $x(t)$ y de allí, mediante integración directa, podés hallar $t(x)$. Invertís esa relación y gol.
Las integrales de ambos caminos se pueden reducir a integrales elementales mediante una sustitución.

(c) A partir de lo anterior mostrá que, a tiempos grandes, se tiene $x(t) \to -c\,(t - t_0)$, donde $t_0 \equiv (1+\beta_0)\gamma_0 mc/qE_0$.

> Para entender el abrumador significado de t_0, resolvé el inciso (d) suponiendo que en $x = 0$ descansa un niño neutro y que la partícula es su melliza, a quien cargó eléctricamente frotándola con un globo.

(d) Marcá, en el diagrama de Minkowski de antes, la asíntota oblicua que acabás de encontrar. ¿Puede la niña recibir información emitida por su hermano a tiempos mayores a t_0? Una vez alcanzado el régimen asintótico, ¿qué eventos de la vida del niño son simultáneos al envejecimiento de la cargada melliza según la bitácora de viaje de esta última? *Tip: trazá en el diagrama las curvas de $t' = cte$, siendo t' el tiempo medido por la niña.*