Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Guía 2: *Cálculo variacional. Simetrías.*

Mecánica clásica aplicada al cálculo variacional.

1. Hallar todas las curvas estacionarias (en el sentido de que su longitud es estacionaria) que unen dos puntos de la superficie de un cilindro. Entre todas esas curvas, hallar las curvas de longitud $mínima$.

2. **Superficie de revolución de área mínima**

   a) Dada una función $y(x)$ continua y dos veces derivable con continuidad, y tal que $y(\pm L) = 1$, escribir el área de la superficie de revolución que se genera al rotar el gráfico de la función $y(x)$ alrededor del eje x. Debería obtener

   $$\mathcal{A}[y] = \int_{-L}^{L} F(y, y')\, dx = \int_{-L}^{L} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{1}$$

   La función $F(y, y')$ puede ser considerada como el lagrangiano de un sistema mecánico, y el área $\mathcal{A}$ como la acción.

   b) Escribir la ecuación de E-L que deben satisfacer las funciones $y(x)$ para las cuales $\mathcal{A}$ es estacionaria.

   c) Notar que F no depende explícitamente de x. ¿Cuál es la magnitud conservada asociada a esta propiedad? Usar esta magnitud para reducir en una unidad el grado de la ecuación diferencial que satisfacen las funciones $y(x)$.

   d) A partir de la integral primera del ítem anterior, demostrar que las funciones para las cuales la acción es estacionaria son de la forma $y(x) = (1/a)\cosh(ax)$.

   e) Para apreciar mejor la utilidad de las cantidades conservadas, demostrar el resultado del ítem anterior integrando directamente la ecuación de E-L.

3. a) Según el principio de Fermat, la luz sigue una trayectoria que hace estacionaria la integral

   $$T[\mathbf{r}] = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} ds\, n(\mathbf{r}), \tag{2}$$

   donde $n(\mathbf{r})$ es el índice de refracción del medio. A menos de un factor c, la integral anterior es el tiempo que tarda la luz en ir de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$. Suponiendo que la luz se propaga en el plano xz y que el índice de refracción es

   $$n(z) = \left(1 + \frac{z}{h}\right) n_0, \tag{3}$$

   donde n_0 y h son constantes, mostrar que la trayectoria está dada por

   $$z(x) = -h + \frac{\alpha h}{n_0} \cosh\left(\beta + \frac{n_0 x}{\alpha h}\right), \tag{4}$$

   donde α y β son constantes de integración.

b) ¿Cuál debería ser la función $n(z)$ para que la trayectoria sea un arco de círculo?

c) Este problema inverso también puede resolverse aplicando la ley de Snell. Para eso, note que la ley de Snell tiene el significado de una ecuación de conservación. ¿Cuál es la cantidad conservada? Suponga que la trayectoria es circular y recupere el resultado obtenido a través del principio variacional.

Métodos directos del cálculo variacional aplicados a la mecánica clásica.

4) Cuando se arroja una partícula hacia arriba desde $y = 0$ y con velocidad inicial $v_0 > 0$, su trayectoria es $y(t) = v_0 t - gt^2/2$, y el tiempo que transcurre hasta que vuelve a $y = 0$ es $t_c = 2v_0/g$. Esos son resultados de Física 1, obtenidos con métodos de Física 1. El objetivo ahora es encontrar la trayectoria aplicando explícitamente el principio de Hamilton. Además del potencial, $U(y) = mgy$, la única información que debemos aportar es que la trayectoria parte de $y = 0$ en $t = 0$ y regresa a $y = 0$ en cierto $t_c > 0$. La trayectoria debe pertenecer entonces a la familia de funciones tales que $y(0) = y(t_c) = 0$. Asumiendo unas pocas hipótesis de continuidad y diferenciabilidad, *todas* las funciones de este tipo pueden representarse mediante un desarrollo de Fourier en senos,

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right). \tag{5}$$

Por lo tanto, es posible calcular la acción para cualquier trayectoria como función del conjunto de coeficientes a_n. El cálculo se simplifica notablemente debido a la linealidad del potencial y a las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^{t_c} dt\ \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{t_c} t\right) = \int_0^{t_c} dt\ \cos\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right) \cos\left(\frac{k\pi}{t_c} t\right) = \frac{t_c}{2} \delta_{kn}, \tag{6}$$

donde $n, k \geqslant 1$ y δ_{nk} es la delta de Kronecker.

a) Calcular explícitamente la acción para las funciones del tipo (5) en el intervalo entre $t = 0$ y t_c. El resultado quedará escrito como una serie infinita. Para calcular el término cinético, tendrá que usar las condiciones de ortogonalidad para eliminar una de las sumatorias.

b) Derivando con respecto a cada coeficiente a_n, encontrar la condición que hace estacionaria la acción y los coeficientes a_n^* que corresponden a esa trayectoria.

c) Graficar la solución aproximada

$$y(t, N) = \sum_{n=1}^{N} a_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right) \tag{7}$$

para $N = 1, 2$, etc. y comparar con el gráfico de la solución exacta.

5) Considerar el movimiento unidimensional de una partícula de masa M en el potencial

$$V(x) = \tfrac{1}{2}\kappa x^2 + \tfrac{1}{4}\beta x^4, \qquad \kappa, \beta > 0. \tag{8}$$

Aun sin conocer la solución, podemos anticipar que el movimiento será periódico y simétrico. Suponiendo que la partícula parte del origen a tiempo $t = 0$ y regresa al origen a tiempo $t = T/2$, proponemos como solución aproximada

$$x(t) = a \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{9}$$

a) Encontrar, dentro de esa familia de funciones, aquella para la cual la acción es estacionaria. Hallar la relación entre el período T y la amplitud $A = a$. Escribir esta relación en la siguiente forma:

$$T(z) = \sqrt{\frac{M}{\kappa}}\, f(z), \qquad \text{donde } z = \frac{A^2\beta}{2\kappa}. \tag{10}$$

b) La solución exacta puede escribirse de manera análoga:

$$T_0(z) = \sqrt{\frac{M}{\kappa}}\, f_0(z) = 4\sqrt{\frac{M}{\kappa}}\, \frac{1}{\sqrt{1+z}}\, K\left(-\frac{z}{1+z}\right), \tag{11}$$

donde K es la integral elíptica completa de primera especie (ver la nota abajo). Así, lo que distingue a la solución aproximada de la exacta son las funciones f y f_0. Grafique el error relativo $|1 - f(z)/f_0(z)|$ y muestre que nunca es mayor que el 2,2%. Además, compare los primeros términos de los desarrollos de f y f_0 alrededor de $z = 0$.

c)* Suponga que, para mejorar la aproximación, siguiendo los pasos del problema anterior, se propone buscar las curvas para las cuales la acción es estacionaria dentro de la siguiente familia de funciones

$$x(t) = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + a_3 \sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right). \tag{12}$$

¿Por qué se excluye la frecuencia angular $4\pi/T$? Comprobar que rápidamente la complejidad de los cálculos vuelve impracticable este método. Se recomienda usar algún programa de manipulación simbólica.

Nota: explícitamente,

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-mx^2)}}. \tag{13}$$

De paso, con esta definición a la vista, es un buen ejercicio, completamente a su alcance, deducir la Ec. (11). La definición de la función K puede variar según el autor o el software. PYTHON y MATHEMATICA usan la definición anterior. En la literatura, suele definirse $K(k) = \int_0^1 dx/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$. MAPLE usa esta definición.

Simetrías y leyes de conservación.

6) Demostrar que si el lagrangiano se escribe como una suma de términos

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \tag{14}$$

donde L_n es homogéneo de grado n en las velocidades generalizadas, entonces

$$h = L_2 - L_0. \tag{15}$$

Esta propiedad ahorra muchísimas cuentas, sobre todo al escribir el Hamiltoniano.

7) Indicar qué componentes de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{L}$ se conservan trivialmente para el movimiento de una partícula en potenciales gravitatorios originados en las siguientes distribuciones homogéneas de masa:

a) Un elipsoide con semiejes: i) $a \neq b \neq c$, ii) $a = b \neq c$, iii) $a = b = c$.
b) Un plano.
c) Un semiplano.
d) Una recta.
e) Un cilindro circular recto infinito.
f) Un cilindro cuadrado recto infinito.
g) Dos puntos fijos de masa m.
h) Un cilindro oblicuo de sección circular y cuyo eje forma un ángulo α con el eje z.
i) Un toro circular.

8) Una partícula de masa m se mueve bajo la acción un potencial que se propaga con velocidad $\mathbf{V}$; por ejemplo, una onda electromagnética. El lagrangiano es

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \tfrac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)\,. \tag{16}$$

a) Es fácil hallar una familia no trivial de transformaciones de $\mathbf{r}$ y t, construida a partir de traslaciones en el tiempo y en el espacio, que dejan invariante el potencial. Encontrar dichas transformaciones.
b) Demostrar que estas transformaciones también dejan invariante la energía cinética y, por lo tanto, el lagrangiano.
c) Aplicando el teorema de Noether, o bien a la Landau, encontrar la constante de movimiento asociada a esta simetría del lagrangiano.
d) Hallar la nueva forma del lagrangiano si se usa $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$ como coordenada generalizada.

e) En estas nuevas coordenadas, hay una magnitud que se conserva trivialmente. ¿Cuál es? Usar el resultado del problema 6).

f) Reescribiendo esta magnitud en términos de las coordenadas originales, demostrar que las dos leyes de conservación son equivalentes.

9) **Integral de Jacobi**. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un potencial que rota rígidamente alrededor del eje z con velocidad angular constante ω; por ejemplo, una partícula en la confitería giratoria del cerro Otto. Aquí hay una animación. Se usan las coordenadas cilíndricas de un sistema de ejes fijos.

a) Escrito en términos de las coordenadas cilíndricas y del tiempo, encontrar la forma más general que puede tener el potencial.

b) Es fácil hallar una familia no trivial de transformaciones de las coordenadas y el tiempo que dejan invariante el potencial. Estas transformaciones se construyen a partir de traslaciones en el tiempo y rotaciones según z. Encontrar dicha familia.

c) Demostrar que estas transformaciones también dejan invariante la energía cinética y, por lo tanto, el lagrangiano.

d) Aplicando el teorema de Noether, o bien a la Landau, encontrar la constante de movimiento asociada a esta simetría del lagrangiano.

e) Hallar la nueva forma del lagrangiano si se usan como coordenadas generalizadas las coordenadas cilíndricas de un sistema de referencia que rota con el potencial.

f) Hay una magnitud que se conserva trivialmente. ¿Cuál es?

g) Reescribiendo esta magnitud en términos de las coordenadas originales, demostrar que las dos leyes de conservación son equivalentes.

10) Una partícula de masa m se mueve en el campo gravitatorio generado por un hilo en forma de hélice con distribución uniforme de masa. La ecuación de la hélice es

$$\rho = a, \quad z(\varphi) = \lambda\varphi, \quad -\infty < \varphi < \infty. \tag{17}$$

a) Escribir la forma más general que puede tener el potencial $V(\rho, \varphi, z)$.

b) Es fácil hallar una familia no trivial de transformaciones de $\mathbf{r}$, a partir de traslaciones en z y rotaciones en z, que dejan invariante el potencial. Encontrar dicha familia de transformaciones.

c) Demostrar que estas transformaciones también dejan invariante la energía cinética y, por lo tanto, el lagrangiano.

d) Aplicando el teorema de Noether, o bien a la Landau, encontrar la constante de movimiento asociada a esta simetría del lagrangiano.

11) El lagrangiano de una partícula de masa m y carga e en un campo magnético uniforme en la dirección z es

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \tfrac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\big) + \frac{eB}{2c}\,(x\dot{y} - y\dot{x})\,. \tag{18}$$

   a) Mostrar que el sistema es invariante ante traslaciones espaciales y temporales, y encontrar las magnitudes conservadas asociadas a estas simetrías.

   b) Mostrar que el sistema es invariante frente a rotaciones alrededor del eje z y encontrar la magnitud conservada asociada a esta simetría.

   c) Interpretar las constantes de movimiento en términos de los elementos geométricos que definen la órbita: posición del eje de la hélice, radio, etc.

12) Una partícula se mueve bajo la acción de un potencial que es homogéneo de grado n en $\mathbf{r}$, es decir, $U(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^n U(\mathbf{r})$, para cualquier $\lambda \geqslant 0$. Se propone una transformación de semejanza, cuya versión infinitesimal es

$$\mathbf{r}' = (1 + \epsilon\alpha)\mathbf{r}, \qquad t' = (1 + \epsilon\beta)t, \tag{19}$$

donde α y β son constantes y ϵ es el parámetro infinitesimal de la transformación.

   a) Encontrar el valor de n para el cual esta transformación deja invariante la acción.

   b) Para ese valor de n, hallar la relación que deben satisfacer α y β.

   c) Encontrar la constante de movimiento asociada a esta simetría.

   d) A partir de esta constante, escribir $r(t)$ y mostrar que no depende de $U(\mathbf{r})$.

   e) ¿Cuál es la versión finita de la transformación?

13) (Landau & Lifshitz, § 6). Para un sistema con n grados de libertad, la solución de las ecuaciones de movimiento depende de $2n$ constantes. Si el sistema es aislado, sus ecuaciones de movimiento no dependen explícitamente del tiempo. Entonces, una de las $2n$ constantes es una constante aditiva a la variable t. (Convencerse de que esto es cierto). Conocida la solución general, se tienen n pares de ecuaciones de la forma

$$q_i(t) = f_i(c_1, \ldots, c_{2n-1}, t + t_0), \qquad \dot{q}_i(t) = g_i(c_1, \ldots, c_{2n-1}, t + t_0). \tag{20}$$

A partir de estas ecuaciones, se puede eliminar $t + t_0$, y escribir las $2n - 1$ constantes c_i en términos de q_i y $\dot{q}_i$ sin que aparezca el tiempo:

$$c_i = F_i(q_1, \ldots q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n), \qquad i = 1, \ldots, 2n - 1. \tag{21}$$

Esto tiene exactamente la forma de una ley de conservación. A las constantes de movimiento que no dependen explícitamente del tiempo se las suele llamar *integrales de movimiento*. En esencia, este método es un algoritmo para encontrar las $2n-1$ integrales de movimiento de un sistema aislado.

a) Por ejemplo, para una partícula libre en el plano, podemos escribir la solución de las ecuaciones de movimiento como

$$x(t) = x_0 + v_x t \equiv (t + t_0)v_x, \qquad y(t) = y_0 + v_y t \equiv (t + t_0)v_y + \alpha_0. \tag{22}$$

Luego de haber eliminado $t + t_0$, las constantes a eliminar en términos de x, y, $\dot{x}$ e $\dot{y}$ son v_x, v_y y α_0. ¿Cuáles son las leyes de conservación que se deducen de aquí?

b) Aplicar el procedimiento de eliminación a un oscilador, armónico, isótropo en dos dimensiones. Tiene que encontrar las mismas constantes de movimiento que se obtienen por simple inspección del lagrangiano.

Notar que en este problema se usan las soluciones de las ecuaciones de movimiento para encontrar las integrales de movimiento. Habitualmente el camino es el inverso. Como el método es exhaustivo, permite encontrar simetrías ocultas. Como el método requiere invertir funciones, las integrales de movimiento suelen ser funciones con comportamiento patológico y resultar prácticamente inútiles. Recomendamos la lectura de este paper clásico: M. Henon y C. Heiles, "The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments", Astron. J. **69**, 73–79 (1964), en especial la discusión sobre integrales de movimiento *isolating* y *nonisolating*.

14) a) ¿Cuántas constantes se necesitan para definir la trayectoria de una partícula libre en el plano? Por trayectoria entendemos el conjunto de puntos (x, y) que ocupa la partícula.

b) ¿Cuántas constantes se necesitan para una partícula libre en el espacio?

c) ¿Cuántas para un oscilador, armónico, isótropo, en el plano?

Razone sus respuestas constructivamente. En los dos primeros casos, escriba explícitamente la ecuación de la trayectoria en términos de las integrales de movimiento. El siguiente problema trata con más detalle el caso del oscilador isótropo.

15) Considerar un oscilador armónico, isótropo, en el plano, cuyo lagrangiano es

$$L = \tfrac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \tfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right). \tag{23}$$

Encontrar tres integrales de movimiento independientes. Únicamente usando las leyes de conservación, escribir la ecuación que define la trayectoria (en el sentido del problema anterior) en términos de esas tres integrales de movimiento. *Ayuda*: si bien sabemos que la trayectoria es una elipse, cuya ecuación general es de la forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$, el objetivo es encontrar esta ecuación de manera independiente, y, al mismo tiempo, expresar los parámetros que definen la elipse en términos de las integrales de movimiento. La idea, que ya ha aparecido en los problemas 11) y 14), es que, siendo la trayectoria un objeto geométrico que no depende del tiempo, los parámetros que la definen deben ser constantes de movimiento.

16)* **Vectores de Killing**. El lagrangiano de una partícula de masa $m = 1$ restringida a moverse en una superficie de n dimensiones es

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^i\dot{q}^j. \tag{24}$$

La notación de las coordenadas con los índices arriba es convencional; no tendrá que esperar mucho para verla aplicada en relatividad. Las funciones g_{ij}, como vimos en la guía anterior, definen el elemento de línea sobre la superficie,

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\mathbf{q})dq^i dq^j. \tag{25}$$

Por lo tanto, el lagrangiano, que es

$$L = T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{26}$$

tiene la forma (24). Una función con n componentes, $\mathbf{k}(\mathbf{q}) = \{k^1(\mathbf{q}), \ldots, k^n(\mathbf{q})\}$, se llama vector de Killing si se conserva el producto escalar

$$\mathbf{k}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} k^i(\mathbf{q})\, p_i. \tag{27}$$

Demostrar que el campo $\mathbf{k}(\mathbf{q})$ debe satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(k^i\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^i} + \frac{\partial k^i}{\partial q^j}g_{il} + \frac{\partial k^i}{\partial q^l}g_{ij}\right) = 0, \qquad j, l = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

La utilidad de todo esto es que, si uno encuentra la solución general de este sistema de ecuaciones, entonces podrá construir constantes de movimiento que tienen la particularidad de ser lineales en los impulsos.

Ayuda: el problema es más fácil de lo que parece. En algún punto encontrará una ecuación de la forma $\sum A_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = 0$. El hecho de que los monomios $\dot{q}^i\dot{q}^j$ sean aparentemente independientes parece sugerir que $A_{ij} = 0$. Sin embargo, como el producto $\dot{q}^i\dot{q}^j$ es simétrico en i y j, en realidad la ecuación anterior sólo implica que la parte simétrica de A_{ij} es cero; es decir, las cantidades que deben anularse son $A_{ij} + A_{ji}$.

17)* Como aplicación del problema anterior vamos a encontrar un conjunto de tres integrales de movimiento independientes para una partícula libre en el plano. En coordenadas cartesianas, el elemento de línea es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}dx^i dx^j, \tag{29}$$

donde $g_{ij} = \delta_{ij}$, con $x^1 = x$ y $x^2 = y$. Sea $\mathbf{k}(x, y)$ un vector de Killing.

a) Escribir las tres componentes independientes de la Ec. (28).

b) Demostrar que la solución más general es $\mathbf{k}(x, y) = \mathbf{a} + b(y\hat{x} - x\hat{y})$, donde $\mathbf{a}$ es un vector arbitrario y b es una constante arbitraria.

c) Aplicando la arbitrariedad en la elección de $\mathbf{a}$ y b, sabiendo que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ es una constante de movimiento, demostrar que se conservan el momento angular y las dos componentes de $\mathbf{p}$.

18)* Encontrar los vectores de Killing para la esfera y demostrar que se conservan las tres componentes del momento angular.