Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Guía 3: *Fuerzas centrales.*

En todos los problemas $\theta = \frac{1}{2}\pi$ y $l > 0$.

1. Una partícula se mueve bajo la acción del potencial $V(r)$. Las dos ecuaciones que gobiernan su movimiento son

$$m r^2 \dot{\varphi} = l, \tag{1}$$

$$\tfrac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = E. \tag{2}$$

   a) Deducir la ecuación diferencial de primer orden que satisface $r(\varphi)$:

$$\frac{l^2}{2mr^4} r'^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = E. \tag{3}$$

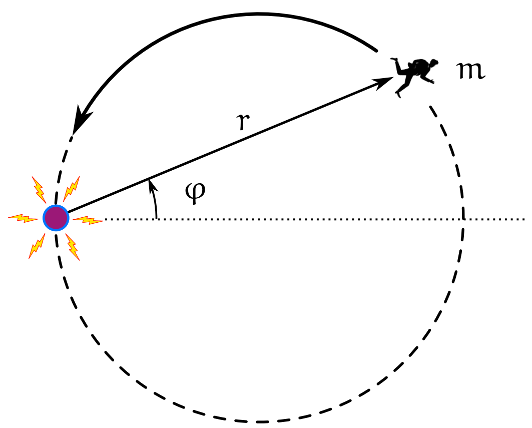
   b) A partir de la ecuación anterior, escribir la ecuación diferencial de primer orden que satisface $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$. A esta ecuación se la llama ecuación diferencial de la órbita:

$$u'^2 + u^2 + \frac{2m}{l^2} V\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{2mE}{l^2}. \tag{4}$$

   c) Derivando esta ecuación respecto de φ, obtener la *ecuación de Binet*, por Jacques Philippe Marie Binet. A esta ecuación también se la llama ecuación diferencial de la órbita. Eso pasa porque falta comunicación:

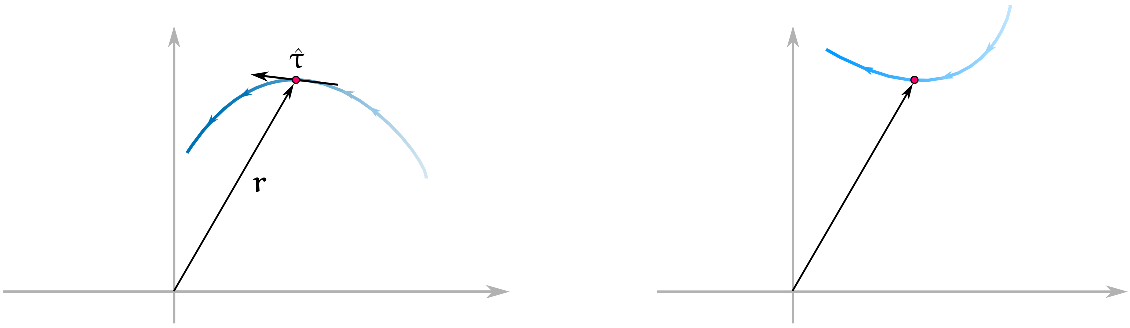
$$u'' + u = \frac{m}{l^2 u^2} V'\left(\frac{1}{u}\right). \tag{5}$$

   Advertencia: la clase de problemas directos (es decir, averiguar la órbita dado el potencial) que se resuelven mediante el cambio de variables $u = r^{-1}$ es muy acotada. De modo que no hay que tratar de resolver todos los problemas aplicando esta sustitución. Sin embargo, para el problema inverso, que consiste en encontrar la fuerza si se conocen las órbitas, la ecuación de Binet siempre es útil. El problema siguiente da un ejemplo.



2. Una partícula de masa m se acerca a un centro de fuerza. La órbita es circular y pasa por el centro de fuerza, como muestra la figura anterior. A partir de la ecuación de Binet, ¿qué fuerza central puede explicar este movimiento? ¿Cuál es la energía de la órbita?

3. Una partícula se mueve bajo la acción del potencial $V(r)$. Dado un punto de la órbita, la figura de la izquierda muestra el caso en el que la órbita es convexa en ese punto; la de la derecha, el caso en el que es cóncava. ¿Bajo qué condiciones se da un caso o el otro?



Ayuda: a medida que la partícula avanza en su órbita, el versor $\hat{\tau}(\varphi)$ tangente a la trayectoria va rotando. La concavidad está relacionada con el signo de la velocidad de rotación de este versor. Calcular el versor $\hat{\tau}$ y su derivada en términos de $u = r^{-1}$. Mostrar que $\hat{\tau}' = \omega \hat{z} \times \hat{\tau}$ y leer de ahí el signo de ω usando la ecuación de Binet.

4. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción del potencial $V(r) = 0$. Cuando $t = 0$, $\varphi = 0$ y la partícula está en el punto de su órbita más cercano al origen.

   a) Usando el formalismo de fuerzas centrales, encontrar $r(t)$, $\varphi(t)$ y $r(\varphi)$. Aquí puede resultar útil escribir la ecuación diferencial de la órbita en la variable $u = r^{-1}$.

   b) Como la partícula en realidad es libre, todas estas ecuaciones tienen que poder deducirse a partir del hecho de que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$. Verificar que esto es así.

5. **Kepler**. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción del potencial $V(r) = -k/r$, con $k > 0$. Graficar el potencial efectivo e identificar los tipos de movimiento posibles. En el caso del movimiento acotado, si en $t = 0$, $\varphi = 0$ y r toma su valor mínimo:

   a) Encontrar $r(\varphi)$ resolviendo la ecuación diferencial de la órbita, Ec. (4). Debería encontrar la ecuación diferencial de un oscilador armónico. La solución es

$$r(\varphi) = \frac{1}{1 + e\cos\varphi}\,\frac{l^2}{mk}, \tag{6}$$

   donde

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \tag{7}$$

   Este es uno de los casos en los que la sustitución $u = r^{-1}$ resulta muy útil.

b) Demostrar que (6) es la ecuación de una elipse con el origen en uno de sus focos. Verificar que

$$E = -\frac{k}{2a}, \qquad \frac{l^2}{mk} = a(1 - e^2). \tag{8}$$

Notar que el semieje mayor y la excentricidad se definen como

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}, \qquad e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}. \tag{9}$$

c) Encontrar $r(\varphi)$ integrando la Ec. (3), es decir, por **cuadraturas**. El primer paso será calcular $\varphi(r)$:

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - \dfrac{l^2}{2mr^2} + V(r)}}. \tag{10}$$

d) Encontrar el período del movimiento T. Siga estas dos alternativas: i) integrando directamente la ecuación para dt que se obtiene a partir de la Ec. (2), ii) aplicando la ley de conservación de la velocidad areolar, junto al hecho de que el área de una elipse es igual a πab. En realidad, en el primer caso estará calculando el período de oscilación radial y, en el segundo, el período del movimiento angular. Debido a la forma de la órbita, ambos períodos coinciden. Notar que, en general, $\varphi(t)$, módulo 2π, no tiene por qué ser una función periódica.

e) Demostrar que las relaciones que hay entre E, T y a son las mismas que las que existen para una órbita circular de la misma energía y radio a. Este conocimiento es muy útil en la práctica, porque evita tener que deducir cada vez el período y la energía en el problema de Kepler. Alcanza con resolver el problema para una órbita circular, que cabe en diez caracteres: $m\omega^2 r = -F(r)$. Otro conocimiento útil es que, para una órbita circular, la energía total es un medio de la energía potencial.

f) No es fácil escribir la función $r(t)$ explícitamente. Sin embargo es posible escribir t y r de manera paramétrica en términos de la *excentricidad anómala*, comúnmente llamada ξ, aunque los astrónomos prefieren E. En términos de esta variable es

$$r(\xi) = a(1 - e\cos\xi). \tag{11}$$

Encontrar la función $t(\xi)$. Esta es la ecuación de Kepler. Mostrar que ξ es el parámetro usual para definir una elipse en coordenadas cartesianas con origen en el centro de la elipse: $x = a\cos\xi$, $y = b\sin\xi$. Encontrar $\varphi(\xi)$.

6. En el problema de Kepler, para una partícula en movimiento acotado, encontrar los promedios de r y u consideradas: a) funciones del ángulo φ, b) funciones del tiempo, c) funciones de la longitud de arco (en este caso sólo para r). *Ayuda*: en algún momento puede ser útil usar ξ como variable de integración.

7. En el problema de Kepler, para una partícula en movimiento acotado, mostrar que el vector velocidad describe un círculo. Encontrar ese círculo. En general, la curva descripta por la velocidad se llama hodógrafa.

8. **Hooke**. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción del potencial $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$, con $k > 0$. Graficar el potencial efectivo e identificar los tipos de movimiento posibles. Cuando $t = 0$, $\varphi = 0$ y la partícula está en un periapsis.

   a) Encontrar $r(t)$ y $\varphi(t)$ por cuadraturas (i.e., resolviendo integrales), a partir de las Ecs. (1) y (2). En el problema 1 de la Guía 1 ya hemos calculado $r(t)$.

   b) ¿Cuál es el periodo T_r de $r(t)$? ¿Cuál es período T_φ de $\varphi(t)$?

   c) A partir de los resultados anteriores, encontrar $r(\varphi)$ y demostrar que la órbita es una elipse centrada. Ahora debería resultar clara la relación que hay entre T_r y T_φ.

   d) Encontrar $r(\varphi)$ por cuadraturas a partir de la Ec. (3).

   e) Encontrar $r(\varphi)$ resolviendo la ecuación diferencial (3) mediante un cambio de variables. Aquí, la sustitución $u = r^{-1}$ no tiene utilidad, pero hay otra sustitución muy simple, también de la forma $z = r^n$, que hace que el problema se vuelva trivial.

   f) Este problema de fuerzas centrales se resuelve mucho más fácilmente en coordenadas cartesianas. A partir de las soluciones $x(t)$ e $y(t)$, encontrar $r(t)$, $\varphi(t)$ y $r(\varphi)$.

Son pocos los problemas que se pueden resolver en términos de funciones bien conocidas. Pero, por cada problema de esta clase, existe una familia de problemas igualmente resolubles. Basta sumar al potencial original $V(r)$ un término de la forma α/r^2. El siguiente problema muestra un ejemplo de este procedimiento aplicado al potencial de Kepler.

9) Considerar el potencial $V(r) = -k/r + \alpha/r^2$, con $k > 0$.

   a) Graficar el potencial efectivo considerando todas las alternativas posibles.

   b) Si el movimiento es acotado, mostrar que $r(\varphi)$ se obtiene mediante una simple modificación de la Ec. (6). El camino más directo es hacer un cambio de variable de φ a $\lambda\varphi$ en la ecuación diferencial de la órbita (4). Graficar la órbita para distintos valores de α, l y E.

   c) Demostrar que el período T_r de movimiento radial permanece inalterado.

   d) ¿Bajo qué condiciones la órbita es cerrada?

   e) ¿Bajo qué condiciones puede decirse que la órbita es una elipse en precesión? Encontrar la velocidad de precesión, $\Omega_{\text{prec}} = \delta\varphi/T_r$, donde $\delta\varphi$ es el ángulo entre dos periápsides sucesivos.

   f) ¿La precesión es prógrada o retrógrada? Es decir, ¿tiene el signo de $\dot{\varphi}$ o el contrario? Aquí hay una animación que muestra precesión retrógrada. Aquí hay una prógrada.

10) a) Dado un potencial $V(r)$, ¿qué condición se debe cumplir para que sean admisibles órbitas circulares de radio r_0? Aunque las órbitas circulares son visibles en el gráfico del potencial efectivo, en principio la cuestión es mucho más directa. La condición está relacionada con una propiedad de la función $V(r)$ y sólo de la función $V(r)$.

b) Por ejemplo, volviendo al potencial del problema 9). ¿Para qué radios admite órbitas circulares? Considerar los tres casos posibles: $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ y $\alpha < 0$.

c) Dado $V(r)$, en caso de existir órbitas circulares de radio r_0, ¿cuánto vale $\dot{\varphi}(r_0)$?

Asumir que $V(r)$ admite órbitas circulares de radio r_0. Suponer que, manteniendo l fijo, se perturba la órbita, de modo que ahora es $r(\varphi) = r_0 + \delta r(\varphi)$, con $|\delta r(\varphi)| \ll r_0$.

d) A partir de la ecuación diferencial de la órbita, en la aproximación de pequeñas oscilaciones, encontrar $\delta r(\varphi)$. En particular, demostrar que puede escribirse

$$r(\varphi) \simeq r_0 - \delta r_0 \cos \kappa\varphi \simeq \frac{r_0}{1 + \dfrac{\delta r_0}{r_0} \cos \kappa\varphi}, \tag{12}$$

donde

$$\kappa(r_0) = \sqrt{3 + \frac{r_0 V''(r_0)}{V'(r_0)}}. \tag{13}$$

e) Con esto a la vista, ¿cuál es la condición para que la órbita circular sea estable?

f) Si el potencial es de la forma $V(r) = -\alpha/r^n$, con $\alpha > 0$, ¿para qué valores de n las órbitas circulares son estables?

g) Sea Δ el incremento de φ entre dos periápsides consecutivos. ¿Cuánto vale Δ en términos de κ?

h) ¿Cuánto vale κ para el problema de Kepler? ¿Cuánto vale para el problema de Hooke? ¿Cuánto vale Δ? ¿Las órbitas perturbadas son cerradas o abiertas?

i) Demostrar que para que la órbita sea cerrada, $\kappa(r)$ debe ser un número racional $\rho(r)$. Suponer que esta condición es válida en un intervalo de valores de r. Puesto que $\kappa(r)$ es una función continua de r y los números racionales toman valores discretos, $\rho(r)$ debe ser el mismo número racional para todo r dentro del intervalo: $\rho(r) \equiv \rho$. Escribir la condición $\kappa(r) = \rho$ como una ecuación diferencial para $U(r)$ y resolverla. Observar que esto restringe la clase de potenciales que poseen órbitas cerradas para todo un rango de condiciones iniciales. Esta es la base del teorema de Bertrand: sólo para los potenciales $-k/r$ y $\frac{1}{2}kr^2$ todas las órbitas ligadas son cerradas.

11) Siguiendo con el problema anterior. En relatividad general, el análogo del problema de Kepler tiene un término extra en el potencial efectivo:

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} - \frac{GMl^2}{mc^2r^3}. \tag{14}$$

a) Demostrar que

$$\kappa = \sqrt{1-3x}, \tag{15}$$

donde se ha definido el parámetro adimensional $x = 2GM/c^2r_0$, que es el cociente entre el radio de Schwarzschild, $r_S = 2GM/c^2$, y el radio de la órbita.

b) Verificar que, para el Sol, el radio de Schwarzschild es muy pequeño comparado con el propio radio del Sol y con los radios típicos de las órbitas de los planetas. De modo que, al menos en el sistema solar, $x \ll 1$ y el Sol no es un agujero negro.

c) Aproximar κ a primer orden en x y calcular Δ en la misma aproximación.

d) Usando la Ec. (12), mostrar que la órbita perturbada es una elipse en precesión. ¿Cuánto vale el semieje mayor de la elipse? Recordar que $a = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min})$.

e) Mostrar que, a primer orden en x, el ángulo que avanza el periapsis en cada ciclo de movimiento radial, $\delta\varphi = \Delta - 2\pi$, es

$$\delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a}. \tag{16}$$

Notar que la precesión es prógrada: el periapsis de la órbita avanza en el mismo sentido que el ángulo φ.

f) Descontadas las perturbaciones de los otros planetas, que dan lugar a una precesión de unos 532″ por siglo, Mercurio tiene una precesión anómala de 42,98″ por siglo. Para el Sol, $GM/c^2 \approx 1476{,}63$ m. El semieje mayor de Mercurio es $a \approx 5{,}790\,92 \times 10^{10}$ m, y su período de revolución es $\tau \approx 87{,}969$ días. Teniendo en cuenta que un siglo tiene, por convención, $100 \times 365{,}25$ días, ¿cuánto vale, según la Ec. (16), el efecto acumulado durante un siglo de la precesión relativista de Mercurio? ¿Cómo se compara con los 42,98″?

g) Para ser honestos, la órbita de Mercurio está lejos de ser una órbita circular perturbada. Su distancia al Sol varía entre 4,6 y $6{,}9 \times 10^{10}$ m, aproximadamente. Esto significa una variación relativa del 40%. No puede hablarse de una órbita circular perturbada, sino de una órbita elíptica perturbada. La fórmula adecuada en esta situación, deducida por Einstein en 1915*, es

$$\delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2(1-e^2)a}, \tag{17}$$

donde e es la excentricidad de la órbita. En el caso de Mercurio, $e \approx 0{,}205\,631$. Usando esta expresión para $\delta\varphi$, ¿cuánto vale el efecto acumulado de la precesión relativista durante un siglo? ¿Cómo se compara con los 42,98″?

*"Explanation of the perihelion motion of mercury from the general theory of relativity".

12) Suponer que la atracción gravitatoria está definida en realidad por un potencial que se aparta levemente de la ley del recíproco de la distancia,[†]

$$U(r) = -\frac{k'}{r^{1+\epsilon}} = -\frac{k}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\epsilon} \simeq -\frac{k}{r}\left(1 + \epsilon \log \frac{r_0}{r}\right). \tag{18}$$

a) Calcular el ángulo de precesión para una órbita circular perturbada.

b) ¿Cuánto debe valer ϵ para explicar la precesión anómala de Mercurio, supuesta despreciable la excentricidad?

13) El medio interplanetario tiene una densidad baja pero finita. Una explicación para la precesión anómala de Mercurio podría ser la perturbación introducida por esta distribución de materia. Si se asume que el medio interplanetario tiene una distribución de masa esféricamente simétrica, con densidad ρ constante, ¿qué potencial produce? Usar los procedimientos de los problemas anteriores para calcular la precesión de una órbita circular perturbada. Asumir que la masa total de la materia contenida dentro de la órbita del planeta es mucho menor que la masa del Sol. ¿La precesión es prógrada o retrógrada? Notar que la precesión anómala de Mercurio es prógrada. ¿Qué densidad ρ cancelaría, para Mercurio, la precesión anómala atribuida a los efectos relativistas? ¿Cómo se compara eso con la densidad promedio del medio interplanetario? Ver, por ejemplo, Wikipedia: Interplanetary dust cloud.

Dispersión

14) Calcular la sección eficaz diferencial y total para la dispersión de partículas por una esfera rígida de radio a. Para calcular el ángulo de dispersión considere dos métodos:

- Use que el ángulo de reflexión es igual al de incidencia. Justifique esta hipótesis.
- Use la fórmula general para el ángulo de dispersión por un potencial $V(r)$ y analice el límite en que $V(r) = 0$ para $r > a$ y tiende a infinito para $r < a$.

15) Como en el problema anterior, sobre una esfera rígida incide un haz de partículas. Pero ahora las partículas que chocan contra la esfera son absorbidas con una probabilidad proporcional a la componente de su velocidad normal a la esfera. Las partículas que no son absorbidas chocan elásticamente. Hallar las sección eficaz diferencial y la total.

16) Calcular la sección eficaz diferencial y total para la dispersión de partículas de masa m por un pozo de potencial esférico, con $V = 0$ para $r \geqslant a$ y $V = -V_0 < 0$ para $r < a$.

17) Calcular la sección eficaz diferencial para la dispersión de partículas por un potencial $V(r) = k/r^2$, con $k > 0$.

[†]Entre los años 1895 y 1903, esta posibilidad fue considerada seriamente para explicar la precesión anómala de Mercurio, pero fue eventualmente descartada por estar en contradicción con el movimiento de la Luna.