Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023
Guía 5: *Relatividad especial.*

1. **Ver no es lo mismo que medir y todo es una gran confusión**. El sistema $\mathcal{S}'$ se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto a $\mathcal{S}$. Un observador $\mathcal{O}$, en reposo en $\mathcal{S}$, dispone de un reloj que marca el tiempo t del sistema $\mathcal{S}$. Cuando su reloj marca $t = 0$, el observador $\mathcal{O}$ ve pasar justo frente a él, a una distancia despreciable, un reloj $\mathcal{R}'$ fijo en el sistema $\mathcal{S}'$ y que justo marca el tiempo $t' = 0$ del sistema $\mathcal{S}'$. En general, ¿cuál es el tiempo que marca el reloj $\mathcal{R}'$ **visto** por el observador $\mathcal{O}$ como función de t, tanto para $t \geqslant 0$ como para $t < 0$? Si a tiempo t el observador $\mathcal{O}$ ve pasar al reloj $\mathcal{R}'$ justo por la posición de un reloj $\mathcal{R}$ del sistema S, ¿cuál es el tiempo que marca el reloj $\mathcal{R}$ según las observaciones de $\mathcal{O}$?

2. En coordenadas cartesianas, el lagrangiano relativista de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético es

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\left[\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right]. \tag{1}$$

   a) Encontrar la función h.

   b) En particular, escribir la función h si $\mathbf{A} = 0$ y $\Phi(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r})$.

   Notar que, aunque se usan coordenadas cartesianas, todos los cálculos pueden hacerse de manera vectorial.

3. a) **Movimiento hiperbólico**. Encontrar el movimiento para todo t de una partícula de masa m y carga e en un campo eléctrico constante y uniforme $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \lambda\hat{x}$. Asumir $e\lambda > 0$. En $t = 0$, la carga está en el origen y tiene velocidad nula.

   b) Demostrar que, en el sistema instantáneamente en reposo respecto a la carga, la aceleración siempre toma el mismo valor $e\lambda/m$.

   c) Encontrar la trayectoria si ahora la partícula tiene una velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = v_0\hat{y}$.

4. **Coulomb relativista**. Una partícula de masa m se mueve en un campo coulombiano,

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \qquad \text{con } k > 0. \tag{2}$$

   Suponer que el movimiento tiene lugar en el plano $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

   a) Escribir el lagrangiano en coordenadas esféricas.

   b) Encontrar dos constantes de movimiento.

   c) Encontrar un problema unidimensional equivalente para la función $r(\varphi)$. Debe llegar a un problema efectivo de apariencia no relativista en donde el potencial es de la forma

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{k'}{r} + \frac{\alpha}{r^2}. \tag{3}$$

d) Graficar el potencial efectivo y clasificar los tipos de movimiento posibles.

e) En el caso del movimiento ligado, demostrar que la órbita es una elipse en precesión. Con la condición inicial $r(0) = r_{\min}$, debería obtener

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\kappa\varphi}. \tag{4}$$

Exprese p, e y κ en términos de los datos del problema y de las constantes de movimiento.

f) Asumir que las correcciones relativistas son pequeñas. Encontrar el ángulo de precesión a primer orden en c^{-2}, definido como el ángulo que separa dos periápsides sucesivos. El resultado debe quedar en función de a y e, donde a es el semieje mayor de la órbita y e su excentricidad.

g) Si uno extrapolara los resultados de este problema al potencial gravitatorio,

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}, \tag{5}$$

¿cuánto valdría el ángulo de precesión?

h) Comparar con el ángulo de precesión predicho por la relatividad general,

$$\delta\varphi_{\mathrm{RG}} = \frac{6\pi GM}{c^2(1-e^2)a^2}. \tag{6}$$

5. **Dispersión de Compton**. Un fotón de longitud de onda λ choca elásticamente contra un electrón en reposo. Como resultado del choque, el fotón es dispersado en una dirección que forma un ángulo θ con su dirección incidente, y su longitud de onda final es λ'. Demostrar que

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta). \tag{7}$$

Recordar que un fotón de longitud de onda λ que se propaga en la dirección $\hat{k}$ tiene un impulso

$$\mathbf{p} = \frac{h}{\lambda}\hat{k}, \tag{8}$$

y una energía $E = pc$. Aquí h es la constante de Planck. Alternativamente puede escribirse $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, donde $\hbar = h/2\pi$ es la constante de Planck reducida y $\mathbf{k} = 2\pi\hat{k}/\lambda$ es el vector número de onda.